Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 9

Wintersemester 2016/17

Lösungshinweise

Hausaufgabe 25
Gegeben seien folgende Mengen:

$$\mathcal{F}_1 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \ A \subseteq [0,1] \text{ oder } A^c \subseteq [0,1]\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \ A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

Handelt es sich bei $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ um σ-Algebren über $\mathbb{R}$?

Lösung zu Hausaufgabe 25
Wir wiederholen den Begriff der σ-Algebra:

Definition
Eine $\underline{\sigma\text{-Algebra}}$ über einer Menge Ω ist eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$

iii) $A_i \in \mathcal{A}$ *für* $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Wir starten mit $\mathcal{F}_1$:
Zu i) Mit $\Omega = \mathbb{R}$ gilt $\Omega^c = \emptyset \subseteq [0,1]$ und somit $\Omega \in \mathcal{F}_1$.
Zu ii) Sei $A \in \mathcal{F}_1$. Dann gibt es zwei mögliche Fälle:

- Fall 1 ($A \subseteq [0,1]$): Es gilt $(A^c)^c = A \subseteq [0,1]$ und somit $A^c \in \mathcal{F}_1$.
- Fall 2 ($A^c \subseteq [0,1]$): Nach Definition von $\mathcal{F}_1$ gilt $A^c \in \mathcal{F}_1$.

Zu iii) Sei $A_i \in \mathcal{A}$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zwei mögliche Fälle:

- Fall 1 ($\forall i \in \mathbb{N} : A_i \subseteq [0,1]$): Es gilt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq [0,1]$ und somit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}_1$.
- Fall 2 ($\exists n \in \mathbb{N} : A_n^c \subseteq [0,1]$): Dann gilt

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}, i \neq n} A_i^c \cap A_n^c \subseteq [0,1],$$

und somit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}_1$.

Somit handelt es sich bei $\mathcal{F}_1$ um eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$.

Wir fahren fort mit $\mathcal{F}_2$:
Wie man leicht nachprüft sind i) und ii) erfüllt. Betrachte nun die endlichen Mengen $A_i := \{i\}$. Dann gilt $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$, sowie $(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)^c = \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. Da aber weder $\mathbb{N}$ noch $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ endlich sind, ist iii) verletzt und folglich $\mathcal{F}_2$ keine σ-Algebra.

Hausaufgabe 26
Es sei Ω eine abzählbare Menge und $\omega_0 \in \Omega$. Wir definieren

$$P\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], P(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega_0 \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass die Abbildung P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge Ω ist. (Die Abbildung P heißt das zu ω_0 gehörige Punktmaß.)

Lösung zu Hausaufgabe 26

Wir nennen die Abbildung P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Für paarweise disjunkte $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt

$$P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i).$$

Nach Voraussetzung gilt $\omega_0 \in \Omega$. Somit folgt $P(\Omega) = 1$. Seien nun $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkte Mengen. Dann können folgende Fälle auftreten:

- Fall 1 ($\exists n \in \mathbb{N} : \omega_0 \in A_n$): Dann gilt $\omega_0 \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ und somit

$$P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = 1 = 1 + 0 = P(A_n) + \sum_{i\in\mathbb{N}, i\neq n} P(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i).$$

- Fall 2 ($\forall i \in \mathbb{N} : \omega_0 \notin A_i$): Dann gilt $\omega_0 \notin \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ und somit

$$P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = 0 = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i).$$

Hausaufgabe 27
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_i \in \mathcal{F}$ für $i = 1, 2, 3$ drei Ereignisse. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $E_j,\ j \in [4]$, für den Fall, dass $A_3 \subset (A_1 \cap A_2),\ P(A_1) = P(A_2) = 2/3,\ P(A_3) = 1/6$ und $P(A_1 \cap A_2) = 1/3$ gilt.

1. Es tritt mindestens eines der Ereignisse ein. (E_1)
2. Es tritt keines der Ereignisse ein. (E_2)
3. Genau eines der Ereignisse tritt ein. (E_3)
4. Nur A_1, aber keines der anderen Ereignisse tritt ein. (E_4)

Lösung zu Hausaufgabe 27
Wegen $A_3 \subset (A_1 \cap A_2)$ gilt $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup A_2$. Somit folgt:

$$\begin{aligned}
P(E_1) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) \\
&= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1, \\
P(E_2) &= 1 - P(E_1) = 0, \\
P(E_3) &= P(A_1 \backslash (A_2 \cup A_3)) + P(A_2 \backslash (A_1 \cup A_3)) + P(A_3 \backslash (A_1 \cup A_2)) \\
&= P(A_1 \backslash A_2) + P(A_2 \backslash A_1) + 0 \\
&= P(A_1 \cup A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \\
P(E_4) &= P(A_1 \backslash (A_2 \cup A_3)) = P(A_1 \backslash A_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$