Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 9

Wintersemester 2016/17

Die Abgabe zu Blatt 9 erfolgt in der Woche vom **9.1. bis 13.1.2017.**
Fragen und Hinweise bitte an bergold@ma.tum.de.

Übungen (σ-Algebren, Wahrscheinlichkeiten)

Aufgabe 1
Sei $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Geben Sie drei σ-Algebren auf Ω an.

Aufgabe 2
Sei $\omega \in (0,1)$ eine irrationale Zahl. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in [0,1)$ betrachten wir die Abbildung

$$T_k\colon [0,1) \to [0,1), T_k(x) := x + k\omega \mod 1,$$

wobei $a \mod 1 := a - \lfloor a \rfloor \in [0,1)$ für $a \in \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass $T_k(x) \neq T_l(x)$ für $k, l \in \mathbb{Z}, k \neq l$.
2. Zeigen Sie, dass $R := \{(x,y) \in [0,1)^2 |\, y = T_k(x) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $[0,1)$ definiert.
3. Sei nun $[x] := \{T_k(x) |\ k \in \mathbb{Z}\}$ die Äquivalenzklasse von $x \in [0,1)$ bezüglich der Äquivalenzrelation R, sowie

$$[0,1)/R := \{[x] \mid x \in [0,1)\},$$

die Menge aller Äquivalenzklassen. Des Weiteren sei $V \subset [0,1)$ eine Menge, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Punkt enthält. Erläutern Sie, unter welchen Voraussetzungen die Menge V existiert. (Eine solche Menge heißt Vitali-Menge.)

4. Nach Konstruktion der Menge V gilt:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} V_k = [0,1), \quad V_k := \{T_k(v) |\ v \in V\}, \quad V_k \cap V_l = \emptyset \text{ für } k, l \in \mathbb{Z}, k \neq l.$$

Beweisen Sie folgende Aussage: Sei μ ein translationsinvariantes, normiertes Maß auf $\mathbb{R}$, dass auf einer σ-Algebra definiert ist, die alle halboffenen Intervalle und alle Mengen $V_k,\ k \in \mathbb{Z}$ enthält. Dann gilt $\mu(V_k) = \mu(V)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

5. Folgern Sie, dass ein solches Maß μ nicht existiert. Aus diesem Grund gilt:

Es existiert kein translationsinvariantes, normiertes Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 25

Gegeben seien folgende Mengen:

$$\mathcal{F}_1 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \ A \subseteq [0,1] \text{ oder } A^c \subseteq [0,1]\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \ A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

Handelt es sich bei $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ um σ-Algebren über $\mathbb{R}$?

Hausaufgabe 26

Es sei Ω eine abzählbare Menge und $\omega_0 \in \Omega$. Wir definieren

$$P \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], P(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega_0 \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass die Abbildung P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge Ω ist. (Die Abbildung P heißt das zu ω_0 gehörige Punktmaß.)

Hausaufgabe 27

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_i \in \mathcal{F}$ für $i = 1, 2, 3$ drei Ereignisse. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_j, $j \in [4]$, für den Fall, dass $A_3 \subset (A_1 \cap A_2)$, $P(A_1) = P(A_2) = 2/3$, $P(A_3) = 1/6$ und $P(A_1 \cap A_2) = 1/3$ gilt.

1. Es tritt mindestens eines der Ereignisse ein. (E_1)
2. Es tritt keines der Ereignisse ein. (E_2)
3. Genau eines der Ereignisse tritt ein. (E_3)
4. Nur A_1, aber keines der anderen Ereignisse tritt ein. (E_4)

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest
und einen guten Start in das Jahr 2017!