Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 8

Wintersemester 2016/17

Lösungshinweise

Hausaufgabe 22
Gegeben sei ein Paar von Merkmalen $X \in \mathbb{R}^n$ und $Y \in \mathbb{R}^n$.

1. Zeigen Sie, dass eine Häufigkeitstafel höchstens n Einträge größer 0 hat.
2. Sei nun $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ und $0 < y_1 < y_2 < ... < y_n$. Wie sieht die Häufigkeitstafel in diesem Fall aus?
3. Sind die Merkmale X und Y unter diesen Voraussetzungen unabhängig?

Lösung zu Hausaufgabe 22
Teilaufgabe 1: Bei absoluten Häufigkeitstabellen ist die Summe der Randhäufigkeiten gleich n. Dabei entstehen die Randhäufigkeiten gerade als Summe einer Spalte oder Zeile. Somit können höchstens n Einträge größer 0, beziehungsweise größer oder gleich 1 sein.

Teilaufgabe 2: Die Häufigkeitstabelle der absoluten (relativen) Häufigkeiten hat auf der Diagonalen die Einträge 1 ($1/n$), alle anderen Einträge sind gleich 0.

Teilaufgabe 3: Die Merkmale X und Y sind nach Definition unabhängig, falls

$$r(X = a_\kappa, Y = b_\lambda) = r(X = a_\kappa) \cdot r(Y = b_\lambda), \quad \text{für alle } \kappa \in \{1, \dots, k\}, \lambda \in \{1, \dots, l\}.$$

In unserem Fall folgt für die Randhäufigkeiten $r(X = a_\kappa) = 1/n$ und $r(Y = b_\lambda) = 1/n$. Weiterhin gilt:

$$r(X = a_\kappa, Y = b_\lambda) = \begin{cases} 1/n & \text{falls } \kappa = \lambda, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit sind die Merkmale X und Y nicht unabhängig im Sinne der Definition.

Hausaufgabe 23
Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie.

1. Für $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ ist $\sum_{i=1}^n |x_i - c|$ als Funktion von c stetig.
2. Ist $r_{XY} = 1$, so hat die Trendgerade $R_{Y(X)}$ die Steigung 1.

3. Gilt $r_{XY} = 0$, so ist die Trendgerade $R_{Y(X)}$ waagerecht.
4. Für ein Merkmal $X\colon \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{R}, j \to x_j$ sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erklärt durch $f(x) := \sum_{j=1}^{n}(x_j - x)^2$. Dann hat f kein Extremum.

Lösung zu Hausaufgabe 23

1. Richtig. Stetig als Summe stetiger Funktionen.
2. Falsch. Es gilt $a^* > 0$.
3. Richtig. Nach Satz 6 aus der Vorlesung gilt $y = \bar{y}$.
4. Falsch. Die Ableitungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sum_{j=1}^{n}(x_j - x) = -2\sum_{j=1}^{n} x_j + 2nx = 2n(x - \bar{x}), \\ f''(x) &= 2n > 0. \end{aligned}$$

Somit besitzt f an der Stelle $x = \bar{x}$ ein lokales Minimum.
Alternativ: $f(x) = \mathrm{sab}_2(X, x)$.

Hausaufgabe 24

Die drei Läufer Anton, Bernd und Claus treten in einem Rennen gegeneinander an. Konstruieren Sie einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum für den Ausgang des Rennens, sodass die Ereignisse „Anton erreicht das Ziel vor Bernd“, „Bernd erreicht das Ziel vor Claus“ und „Claus erreicht das Ziel vor Anton“ jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 1/2 eintreten. Dabei dürfen Sie davon ausgehen, dass es keinen Gleichstand zwischen den Läufern gibt.

Lösung zu Hausaufgabe 24

Sei $\Omega = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$ die Ergebnismenge. Zum Beispiel steht das Element abc für das Ergebnis „Anton erreicht das Ziel gefolgt von Bernd gefolgt von Claus“. Somit lauten Ereignisse von oben:

$$\begin{aligned} A_{ab} &:= \{abc, acb, cab\} \text{ (Anton vor Bernd)}, \\ A_{bc} &:= \{abc, bac, bca\} \text{ (Bernd vor Claus)}, \\ A_{ca} &:= \{bca, cab, cba\} \text{ (Claus vor Anton)}. \end{aligned}$$

Gesucht ist nun eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $p\colon \Omega \to [0, 1]$ mit

$$p(abc) + p(acb) + ... + p(cba) = 1,$$

sodass die Ereignisse A_{ab}, A_{bc} und A_{ca} jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 1/2 eintreten. Die Gleichverteilung (Laplace-Verteilung) erfüllt diese Bedingung nicht, da in diesem Fall

$$P(A_{ab}) = P(A_{bc}) = P(A_{ca}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \ngtr \frac{1}{2}.$$

Eine mögliche Wahl ist

$$p(abc) = p(bca) = p(cab) = \frac{1}{3}, \quad p(acb) = p(bac) = p(cba) = 0.$$

Somit haben die Ereignisse A_{ab}, A_{bc} und A_{ca} dann jeweils eine Wahrscheinlichkeit von 2/3. Diese Lösung lässt sich insbesondere leicht auf einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Gleichstand übertragen. Hierfür müssen die Wahrscheinlichkeiten der zusätzlichen Elementarereignisse auf 0 gesetzt werden.