Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 5

Wintersemester 2016/17

Lösungshinweise

Hausaufgabe 14
Gegeben seien die Datenvektoren $X = (4, 2)^T$ und $Y = (-1, 4)^T$.

1. Berechnen Sie $\|X\|, \|Y\|$ und $\langle X, Y\rangle$. Berechnen Sie ferner den Winkel α, den die beiden Vektoren X und Y einschließen.

2. Bestimmen Sie die Vektoren δ_X und δ_Y, sowie $\|\delta_X\|$ und $\|\delta_Y\|$. Wie können Sie δ_X nutzen um σ_X^2, beziehungsweise s_X^2 zu berechnen?

3. Zeichnen Sie die Gerade $\mathbb{R} \cdot (1, 1)^T$, sowie die Vektoren X und δ_X in ein Koordinatensystem ein.

Lösung zu Hausaufgabe 14
Teilaufgabe 1: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|X\| &= \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \quad \|Y\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}, \\
\langle X, Y\rangle &= 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = 4, \\
\varphi &:= \angle(X, Y) = \arccos\left(\frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\| \cdot \|Y\|}\right) \approx 77.5°.
\end{aligned}$$

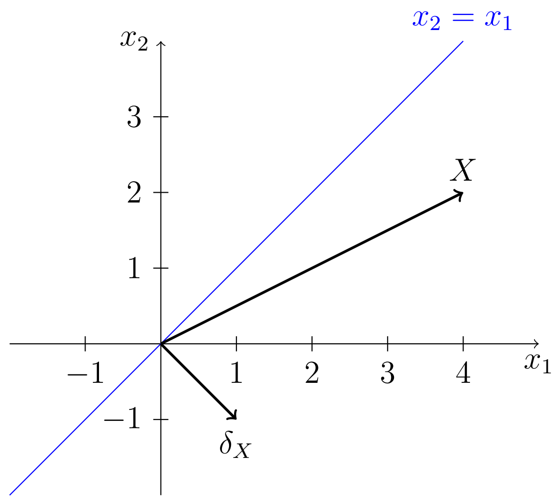
Teilaufgabe 2: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{2}(4 + 2) = 3, \quad \bar{y} = \frac{1}{2}((-1) + 4) = \frac{3}{2} = 1.5, \\
\delta_X &= (x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}) = (4 - 3, 2 - 3) = (1, -1), \\
\delta_Y &= (y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}) = (-1 - 1.5, 4 - 1.5) = (-2.5, 2.5), \\
\sigma_X^2 &= \frac{1}{n}\|\delta_X\|^2 = 1, \quad s_X^2 = \frac{1}{n-1}\|\delta_X\|^2 = 2.
\end{aligned}$$

Teilaufgabe 3: Siehe Skizze.

Hausaufgabe 15
Formulieren Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass folgende Gleichung für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle = |\langle x, y\rangle|^2 + \|x \times y\|^2.$$



Beweisen Sie mit Hilfe dieser Gleichung die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $n \leq 3$. Gehen Sie in Ihrem Beweis insbesondere auf die Fälle $n < 3$ ein.

Lösung zu Hausaufgabe 15
Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$. Dann gilt:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Sei nun $x, y \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \langle y, y\rangle = \|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \\
\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\
&= x_1^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2 + x_3^2y_3^2, \\
|\langle x, y\rangle|^2 &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\
&= x_1^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1x_3y_1y_3 + 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_3^2, \\
\|x \times y\|^2 &= \|(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)^T\|^2 \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&= x_2^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_2^2 + \ldots \\
&\ldots + x_3^2y_1^2 - 2x_1x_3y_1y_3 + x_1^2y_3^2 + \ldots \\
&\ldots + x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich beider Seiten liefert somit

$$\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle = |\langle x, y\rangle|^2 + \|x \times y\|^2.$$

Da außerdem $\|x \times y\|^2 \geq 0$, folgt

$$\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \geq |\langle x, y\rangle|^2.$$

Beide Seiten der letzten Ungleichung sind stets größer Null. Somit können wir auf beiden Seiten die Wurzel ziehen und erhalten schließlich

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Im Fall $n = 2$ setzt man $x_3 = y_3 = 0$ und betrachtet die Einbettung der Ebene $\mathbb{R}^2$ in den Raum $\mathbb{R}^3$. Im Fall $n = 1$ ist der Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung trivial, da $xy \leq |xy| = |x| \cdot |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Beachten Sie, dass $\|x \times y\| = 0$ genau dann, wenn die Vektoren x und y linear abhängig sind. In diesem Fall gilt dann

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|.$$