

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 5

Wintersemester 2016/17

Die Abgabe zu Blatt 5 erfolgt in der Woche vom **28.11. bis 2.12.2016**.

Fragen und Hinweise bitte an bergold@ma.tum.de.

Übungen (Abweichungsmaße, RStudio)

Aufgabe 1

Betrachten Sie erneut das Merkmal

$$X: [n] \rightarrow \mathbb{R}, X(\alpha) := m\alpha + t,$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $m, t \in \mathbb{R}, m \neq 0$. Zeigen Sie folgende Ungleichung:

$$r\left(X \leq \frac{m(n+1)}{2} + t - n^2\right) + r\left(X \geq \frac{m(n+1)}{2} + t + n^2\right) \leq \frac{m^2(n^2 - 1)}{12n^4}.$$

Beschreiben Sie die Ungleichung für den Fall $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2

Gegeben seien die folgenden Werte eines Merkmals X :

8, 7, 7, 5, 4, 7, 3, 8, 7, 6.

1. Berechnen Sie \bar{x} sowie $\overline{x^2}$.
2. Bestimmen Sie die Abweichungsmaße σ_X^2 und s_X^2 .
3. Wie lautet die Standardisierung von X ?

Aufgabe 3

Sei $X \in \mathbb{R}^n$ ein Merkmal und $c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie mit Hilfe von Datenvektoren, sowie dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} \text{sab}_2(X, c) &= \text{sab}_2(X, \bar{x}) + n(\bar{x} - c)^2, \\ \text{sab}_2(X, \bar{x}) &= n(\overline{x^2} - \bar{x}^2). \end{aligned}$$

Hausaufgaben

Hausaufgabe 13 (Diese Hausaufgabe erstellen Sie bitte mit RStudio)

Auf unserer Vorlesungsseite <https://www-m3.ma.tum.de/StochastikLG2016/WebHome> finden Sie den Datensatz `tips.txt`. Dieser enthält die Auflistung der Trinkgelder, die eine Kellnerin über einen Zeitraum von mehreren Monaten in einem Restaurant erhalten hat.

1. Machen Sie sich mit dem Befehl `read.table()` vertraut.
2. Laden Sie den oben beschriebenen Datensatz und lesen Sie ihn in RStudio ein. (Hinweis: `getwd()` zeigt Ihnen an, in welchem Arbeitsverzeichnis Sie derzeit mit RStudio arbeiten. Mit `setwd()` können Sie das Arbeitsverzeichnis wechseln.)
3. Benutzen Sie den Befehl `as.matrix()`, um den Datensatz in eine Matrix mit numerischen Werten umzuwandeln. Berechnen Sie im Anschluss das arithmetische Mittel \bar{x} , sowie die Stichprobenvarianz s_X für das Merkmal Trinkgeld.
4. Erstellen Sie ein Histogramm des Merkmals. Zeichnen Sie ferner die Gerade $x = \bar{x}$ im Histogramm ein.
5. Erzeugen Sie die Standardisierung des Merkmals.
6. Zeichnen Sie ein Histogramm des standardisierten Merkmals. Wie lauten arithmetisches Mittel und Stichprobenvarianz des standardisierten Merkmals?

Hausaufgabe 14

Gegeben seien die Datenvektoren $X = (4, 2)^T$ und $Y = (-1, 4)^T$.

1. Berechnen Sie $\|X\|$, $\|Y\|$ und $\langle X, Y \rangle$. Berechnen Sie ferner den Winkel α , den die beiden Vektoren X und Y einschließen.
2. Bestimmen Sie die Vektoren δ_X und δ_Y , sowie $\|\delta_X\|$ und $\|\delta_Y\|$. Wie können Sie δ_X nutzen um σ_X^2 , beziehungsweise s_X^2 zu berechnen?
3. Zeichnen Sie die Gerade $\mathbb{R} \cdot (1, 1)^T$, sowie die Vektoren X und δ_X in ein Koordinatensystem ein.

Hausaufgabe 15

Formulieren Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie, dass folgende Gleichung für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle = |\langle x, y \rangle|^2 + \|x \times y\|^2.$$

Beweisen Sie mit Hilfe dieser Gleichung die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $n \leq 3$. Gehen Sie in Ihrem Beweis insbesondere auf die Fälle $n < 3$ ein.