Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 3

Wintersemester 2016/17

Lösungshinweise

Hausaufgabe 9
Beweisen Sie folgende Ungleichung:

$$x_{geo} \leq \bar{x} \quad \text{und} \quad x_{geo} = \bar{x} \;\Leftrightarrow x_1 = ... = x_n.$$

Lösung zu Hausaufgabe 9
Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Im Fall $n = 1$ gilt die Aussage mit Gleichheit.
Induktionsvoraussetzung: Für n positive reelle Zahlen gelte $x_{geo} \leq \bar{x}$.
Induktionsschritt: Gegeben seien die $n+1$ positiven Zahlen $x_1, ..., x_{n+1}$. Das arithmetische Mittel $\bar{x}$ dieser Zahlen erfüllt:

$$(n+1)\bar{x} = x_1 + ... + x_n + x_{n+1}.$$

Im Falle $x_1 = ... = x_{n+1} = \bar{x}$ gilt die Ungleichung insbesondere mit Gleichheit. In allen anderen Fällen finden wir eine Zahl die größer ist als $\bar{x}$ und eine Zahl die kleiner ist als $\bar{x}$. Sei ohne Einschränkung $x_n > \bar{x} > x_{n+1}$. Dann gilt

$$(x_n - \bar{x})(\bar{x} - x_{n+1}) > 0. \tag{1}$$

Mit $y := x_n + x_{n+1} - \bar{x} > x_n - \bar{x} > 0$ erhalten wir

$$n\bar{x} = x_1 + ... + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} - \bar{x} = x_1 + ... + x_{n-1} + y.$$

Daher ist $\bar{x}$ das arithmetische Mittel der Zahlen $x_1, ..., x_{n-1}, y$. Nach Voraussetzung folgt deshalb

$$\bar{x}^{n+1} = \bar{x}^n \cdot \bar{x} \geq x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1} \cdot y\bar{x}. \tag{2}$$

Darüber hinaus gilt mit (1):

$$y\bar{x} - x_n x_{n+1} = (x_n + x_{n+1} - \bar{x})\bar{x} - x_n x_{n+1} = (x_n - \bar{x})(\bar{x} - x_{n+1}) > 0,$$

also

$$y\bar{x} > x_n x_{n+1}.$$

Somit folgt aus (2):

$$\bar{x}^{n+1} > x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1} \cdot x_n x_{n+1} = x_{geo}^{n+1},$$

was zu zeigen war.