

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
ZENTRUM MATHEMATIK

**Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 23**

Sommersemester 2017

Fragen und Hinweise bitte an [bergold@ma.tum.de](mailto:bergold@ma.tum.de).

Übungen (Konfidenz)

**Aufgabe 1**

Bei einer Produktion wird die Größe der Werkstücke als normalverteilt angenommen mit unbekanntem Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma = 1$ . Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 16$  liefert das folgende Ergebnis:

25.4, 25.3, 25.8, 24.9, 25.4, 26.4, 26.1, 25.5,  
26.0, 25.8, 25.1, 25.8, 24.7, 25.2, 25.8, 25.2

1. Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für  $\mu$  an.
2. Ermitteln Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert.
3. Wie muss der Stichprobenumfang gewählt werden, sodass der Erwartungswert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% um weniger als 0.25 vom arithmetischen Mittel abweicht?

**Aufgabe 2**

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt mit unbekanntem Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma = 5$ .

1. Welches Konfidenzniveau besitzt das übliche Konfidenz-Schätzverfahren für  $\mu$ , wenn bei  $n = 200$  konkrete Schätzintervalle der Länge  $l = 1.5$  entstehen?
2. Welche Länge besitzt ein konkretes Schätzintervall für  $\mu$ , das bei  $n = 150$  mit dem üblichen Konfidenz-Schätzverfahren zu einem Niveau von 0.8 entsteht?

Zusatzaufgaben

**Aufgabe 1**

In einer Urne befinden sich 150 weiße und 50 rote Kugeln. Sie ziehen 100 mal mit Zurücklegen. In welchem Intervall liegt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%? Benutzen Sie die Ungleichung von Chebyshev.

## Aufgabe 2

Vor einer Wahl mit 50 Millionen Wahlberechtigten werden zufällig 500 wahlberechtigte Personen befragt. Um die Unabhängigkeit der gegebenen Antworten zu gewährleisten, gehen wir davon aus, dass es sich bei den Befragten um Personen mit unterschiedlichem Hintergrund (Geburtsort, Wohnort, Geschlecht, etc.) handelt. Für Partei  $A$  sprechen sich  $k_A = 273$  Wahlberechtigte aus, für Partei  $B$  sind es lediglich  $k_B = 28$ .

1. Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten  $R_{A,500}$  und  $R_{B,500}$ .
2. Geben Sie die Werte  $\varepsilon(\alpha, 500)$  für  $\alpha \in \{0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5\}$  tabellarisch an.
3. Berechnen Sie die Konfidenzintervalle für beide Parteien zu den gegebenen Werten von  $\alpha$  und interpretieren Sie die Ergebnisse. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist für Partei  $A$  die absolute Mehrheit sicher? Was lässt sich zum Erreichen der 5%-Hürde für Partei  $B$  sagen?
4. Eine einfache Verbesserung der Vorhersage für Partei  $B$  ist eine  $\hat{p}$ -Korrektur. Wie lauten  $\hat{\varepsilon}(\alpha, 500)$ , sowie die zugehörigen Konfidenzintervalle für  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$ ? Lässt sich nun eine Aussage zum Erreichen der 5%-Hürde treffen?
5. Trotz der Verbesserung der Vorhersage ist für Partei  $B$  noch keine Sicherheit für das Überschreiten der Hürde nachgewiesen. Daher wird der Stichprobenumfang auf  $n = 5000$  erhöht. Vervollständigen Sie folgende Tabelle und interpretieren Sie die Ergebnisse.

| $1 - \alpha$ in %         | 99 | 95 | 90 |
|---------------------------|----|----|----|
| $\varepsilon_\alpha$ in % |    |    |    |
| Intervall Partei A        |    |    |    |
| Intervall Partei B        |    |    |    |

Führen Sie auch hier die  $\hat{p}$ -Korrektur mit  $\hat{p} = 0.056$  und  $\hat{\sigma} = 0.00325$  durch und ergänzen Sie die Tabelle um die Zeilen „ $\hat{\varepsilon}_\alpha$ “ und „Intervall Partei  $B$ “ mit  $\hat{\varepsilon}_\alpha$ . Mit welcher Wahrscheinlichkeit schafft Partei  $B$  die 5%-Hürde?