Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 22

Sommersemester 2017

Lösungshinweise

Hausaufgabe 64

Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ seien unabhängig und normalverteilt mit $\mathbf{E}[X_1] = 0$ und $\mathbf{V}[X_1] = \sigma^2$. Betrachten Sie folgenden Schätzer für die Varianz:

$$S = \frac{2}{n} \cdot X_1^2 + \frac{n-2}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=2}^{n} X_i^2.$$

Berechnen Sie $\mathbf{E}[X_1^2]$. Ist S ein erwartungstreuer Schätzer?

Lösung zu Hausaufgabe 64

Es gilt $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Wir erhalten

$$\sigma^2 = \mathbf{V}[X_1] = \mathbf{E}[X_1^2] - \mathbf{E}[X_1]^2 = \mathbf{E}[X_1^2].$$

Weiterhin gilt mit $\vartheta = \sigma^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\vartheta[S] &= \frac{2}{n} \cdot \mathbf{E}_\vartheta[X_1^2] + \frac{n-2}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=2}^{n} \mathbf{E}_\vartheta[X_i^2] \\ &= \frac{2}{n} \cdot \sigma^2 + \frac{n-2}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=2}^{n} \sigma^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

Somit ist S erwartungstreu für σ^2.

Hausaufgabe 65

Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_4$ seien unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ und $\mathbf{V}[X_1] = \sigma^2$. Betrachten Sie folgende Punktschätzer für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} S_1(X_1, ..., X_4) &:= 2X_1 + \frac{1}{4}(X_2 + X_3) - \frac{3}{2}X_4, \\ S_2(X_1, ..., X_4) &:= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i + \frac{1}{4}X_4, \\ S_3(X_1, ..., X_4) &:= \frac{1}{4}(X_1 + X_4) + \frac{3}{10}X_3 + \frac{1}{5}X_4. \end{aligned}$$

Sind die angegebenen Schätzer erwartungstreu? Welchen Schätzer bevorzugen Sie?

Lösung zu Hausaufgabe 65
Mit $\vartheta = \mu$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\vartheta[S_1] &= 2\mathbf{E}_\vartheta[X_1] + \frac{1}{4}(\mathbf{E}_\vartheta[X_2] + \mathbf{E}_\vartheta[X_3]) - \frac{3}{2}\mathbf{E}_\vartheta[X_4] = \mu,\\
\mathbf{E}_\vartheta[S_2] &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{E}_\vartheta[X_i] + \frac{1}{4}\mathbf{E}_\vartheta[X_4] = \frac{5}{4}\mu,\\
\mathbf{E}_\vartheta[S_3] &= \frac{1}{4}(\mathbf{E}_\vartheta[X_1] + \mathbf{E}_\vartheta[X_4]) + \frac{3}{10}\mathbf{E}_\vartheta[X_3] + \frac{1}{5}\mathbf{E}_\vartheta[X_4] = \mu.
\end{aligned}$$

Somit sind die Schätzer S_1 und S_3 erwartungstreu. Um zu entscheiden, welcher der beiden Schätzer effizienter ist, berechnen wir noch die Varianzen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_\vartheta[S_1] &= 4\mathbf{V}_\vartheta[X_1] + \frac{1}{16}(\mathbf{V}_\vartheta[X_2] + \mathbf{V}_\vartheta[X_3]) + \frac{9}{4}\mathbf{V}_\vartheta[X_4] = 6.375\sigma^2,\\
\mathbf{V}_\vartheta[S_3] &= \frac{1}{16}(\mathbf{V}_\vartheta[X_1] + \mathbf{V}_\vartheta[X_4]) + \frac{9}{100}\mathbf{V}_\vartheta[X_3] + \frac{1}{25}\mathbf{V}_\vartheta[X_4] = 0.255\sigma^2.
\end{aligned}$$

Da $\mathbf{V}_\vartheta[S_3] < \mathbf{V}_\vartheta[S_1]$ ist der Schätzer S_3 effizienter.

Hausaufgabe 66
Gegeben sei eine Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit Werten in $X(\Omega) = \{-2, -1/2, 0, 2\}$ und folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	-2	$-1/2$	0	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{8} + \frac{7}{8}a$	$\frac{1}{2} - a$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{8}a$

(1)

mit $0 < a < 1/2$. Des Weiteren seien X_1, X_2, X_2 unabhängig und identisch wie X verteilte Zufallsvariablen.

1. Begründen Sie, dass es sich bei (1) um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt.
2. Geben Sie den Erwartungswert von X an.
3. Betrachten Sie folgenden Schätzer für a:

   $$S_1 := \frac{1}{2}X_1 + cX_2 - 2X_3, \quad c \in \mathbb{R}.$$

   Für welchen Wert von c handelt es sich bei S_1 um einen erwartungstreuen Schätzer?
4. Zeigen Sie, dass es sich bei $S_2 := X_1 - 2X_3$ um einen erwartungstreuen Schätzer für a handelt. Welchen der beiden Schätzer bevorzugen Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Hausaufgabe 66
Teilaufgabe 1: Für $0 < a < 1/2$ und $x \in X(\Omega)$ ist $P(X = x) \geq 0$. Weiterhin ist

$\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x) = 1$. Somit ist durch (1) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert.

Teilaufgabe 2: Der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\mathbf{E}[X] = (-2)\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}a\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-a\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}a\right) = -a.$$

Teilaufgabe 3: Mit $\vartheta = a$ berechnen wir

$$\mathbf{E}_\vartheta[S_1] = \frac{1}{2}\mathbf{E}_\vartheta[X_1] + c\mathbf{E}_\vartheta[X_2] - 2\mathbf{E}_\vartheta[X_3] = \left(\frac{1}{2}+c-2\right)(-a) \overset{!}{=} a.$$

Somit muss $c = 1/2$ gewählt werden.

Teilaufgabe 4: Es gilt $\mathbf{E}_\vartheta[S_2] = \mathbf{E}_\vartheta[X_1] - 2\mathbf{E}_\vartheta[X_3] = -(-a) = a$. Um zu entscheiden, welcher der beiden Schätzer effizienter ist, berechnen wir noch die Varianzen:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_\vartheta[S_1] &= \frac{1}{4}\mathbf{E}_\vartheta[X_1] + \frac{1}{4}\mathbf{E}_\vartheta[X_2] + 4\mathbf{E}_\vartheta[X_3] = 4.5\mathbf{V}[X],\\ \mathbf{V}_\vartheta[S_2] &= \mathbf{V}_\vartheta[X_1] + 4\mathbf{V}_\vartheta[X_3] = 5\mathbf{V}[X].\end{aligned}$$

Da $\mathbf{V}_\vartheta[S_1] < \mathbf{V}_\vartheta[S_2]$ ist der Schätzer S_1 effizienter.