Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 22

Sommersemester 2017

Die Abgabe zu Blatt 22 erfolgt in der Woche vom **10.7. bis 14.7.2017.**
Fragen und Hinweise bitte an bergold@ma.tum.de.

Übungen (Schätzungen)

Aufgabe 1
Eine Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ besitze die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(X=0)=\frac{1}{2}\cdot a, \quad P(X=2)=1-\frac{1}{2}\cdot a$$

mit unbekanntem Parameter $0 \le a \le 1$. Es seien X_1, X_2, X_3 unabhängig und identisch wie X verteilte Zufallsvariablen. Des Weiteren seien

$$S_1 := 2+\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2-2X_3,$$
$$S_2 := 2+\frac{1}{4}X_1-\frac{1}{6}X_2-\frac{13}{12}X_3$$

Punktschätzer für den Parameter a. Sind S_1 und S_2 erwartungstreu? Welchen der beiden Schätzer bevorzugen Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 Bei einem Turnier werden von jedem Teilnehmer n Pfeile auf eine Zielscheibe geschossen. Für $i \in \{1, ..., n\}$ seien die Zufallsvariablen X_i unabhängig und identisch verteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ sowie unbekannter Standardabweichung σ und bezeichnen den Abstand des i-ten Pfeils zum Mittelpunkt der Zielscheibe. Des Weiteren sei

$$Y := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i, \quad \lambda_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

eine Konvexkombination der Zufallsvariablen X_i.

1. Zeigen Sie, dass es sich bei Y um einen erwartungstreuen Schätzer für μ handelt.

2. Beweisen Sie nachfolgende Ungleichung:

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \ge \frac{1}{n^2}$$

3. Bestimmen Sie Koeffizienten λ_i, sodass die Effizienz des Schätzers Y optimal wird.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 64
Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ seien unabhängig und normalverteilt mit $\mathbf{E}[X_1] = 0$ und $\mathbf{V}[X_1] = \sigma^2$. Betrachten Sie folgenden Schätzer für die Varianz:

$$S = \frac{2}{n} \cdot X_1^2 + \frac{n-2}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=2}^{n} X_i^2.$$

Berechnen Sie $\mathbf{E}[X_1^2]$. Ist S ein erwartungstreuer Schätzer?

Hausaufgabe 65
Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_4$ seien unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ und $\mathbf{V}[X_1] = \sigma^2$. Betrachten Sie folgende Punktschätzer für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} S_1(X_1, ..., X_4) &:= 2X_1 + \frac{1}{4}(X_2 + X_3) - \frac{3}{2}X_4, \\ S_2(X_1, ..., X_4) &:= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i + \frac{1}{4}X_4, \\ S_3(X_1, ..., X_4) &:= \frac{1}{4}(X_1 + X_4) + \frac{3}{10}X_3 + \frac{1}{5}X_4. \end{aligned}$$

Sind die angegebenen Schätzer erwartungstreu? Welchen Schätzer bevorzugen Sie?

Hausaufgabe 66
Gegeben sei eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit Werten in $X(\Omega) = \{-2, -1/2, 0, 2\}$ und folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	-2	$-1/2$	0	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{8} + \frac{7}{8}a$	$\frac{1}{2} - a$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{8}a$

(1)

mit $0 < a < 1/2$. Des Weiteren seien X_1, X_2, X_2 unabhängig und identisch wie X verteilte Zufallsvariablen.

1. Begründen Sie, dass es sich bei (1) um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt.
2. Geben Sie den Erwartungswert von X an.
3. Betrachten Sie folgenden Schätzer für a:

   $$S_1 := \frac{1}{2}X_1 + cX_2 - 2X_3, \quad c \in \mathbb{R}.$$

   Für welchen Wert von c handelt es sich bei S_1 um einen erwartungstreuen Schätzer?
4. Zeigen Sie, dass es sich bei $S_2 := X_1 - 2X_3$ um einen erwartungstreuen Schätzer für a handelt. Welchen der beiden Schätzer bevorzugen Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.