Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 21

Sommersemester 2017

Lösungshinweise

Hausaufgabe 61
Gegeben seien n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ mit unbekanntem Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 = 0.01$. Außerdem sei

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Wie muss n gewählt werden, sodass der Wert $|\overline{X}_n - \mu|$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% kleiner ist als 0.025? Wenden Sie für Ihre Berechnungen die Ungleichung von Chebyshev an.

Lösung zu Hausaufgabe 61
Wir berechnen den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen $\overline{X}_n$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\overline{X}_n] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu,\\
\mathbf{V}[\overline{X}_n] &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}[X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n}\cdot 0.01 = \frac{1}{100n}.
\end{aligned}$$

Mit der Ungleichung von Chebyshev erhalten wir

$$P(|\overline{X}_n - \mu| < 0.025) \geq 1 - \frac{\mathbf{V}[\overline{X}_n]}{0.025^2} = 1 - \frac{16}{n} \stackrel{!}{=} 0.9.$$

Somit muss $n \geq 160$ gewählt werden.

Hausaufgabe 62
Aus einer Urne mit fünf roten und zehn schwarzen Kugeln wird 3600 mal mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Ziehungen, bei denen eine rote Kugel gezogen wird. Für $i = 1, ..., 3600$ sei insbesondere $X_i = 1$, falls die i-te Kugel rot ist und $X_i = 0$ sonst.

1. Berechnen Sie $\mathbf{E}[X_i]$ und $\mathbf{V}[X_i]$.
2. Berechnen Sie $\mathbf{E}[X]$ und $\mathbf{V}[X]$. (Zwischenergebnis: $\mathbf{E}[X] = 1200$ und $\mathbf{V}[X] = 800$)
3. Ermitteln Sie mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $P(1000 < X < 1400)$.

4. Approximieren Sie den Wert von $P(1000 < X < 1400)$ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Lösung zu Hausaufgabe 62
Teilaufgabe 1: Es sei $i \in \{1, ..., 3600\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_i] &= 1 \cdot \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \\ \mathbf{V}[X_i] &= \mathbf{E}[X_i^2] - \mathbf{E}[X_i]^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Teilaufgabe 2: Es gilt $X = X_1 + ... + X_{3600}$. Somit folgern wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{i=1}^{3600} \mathbf{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{3600} \frac{1}{3} = 1200, \\ \mathbf{V}[X] &= \sum_{i=1}^{3600} \mathbf{V}[X_i] = \sum_{i=1}^{3600} \frac{2}{9} = 800. \end{aligned}$$

Teilaufgabe 3: Mit der Chebyshev-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} P(1000 < X < 1400) &= P(-200 < X - 1200 < 200) \\ &= P(|X - \mathbf{E}[X]| < 200) \geq 1 - \frac{800}{200^2} = 1 - 0.02 = 0.98. \end{aligned}$$

Teilaufgabe 4: Mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes erhalten wir

$$\begin{aligned} P(1000 < X < 1400) &= P\left(\frac{1000 - 1200}{\sqrt{800}} < X^* < \frac{1400 - 1200}{\sqrt{800}}\right) \\ &\approx 2\Phi\left(\frac{200}{\sqrt{800}}\right) - 1 \approx 2 \cdot 1 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 63
In der Abschlussklasse einer Schule haben 10% der Schüler ihre Hausaufgaben nicht erledigt. Der Mathematiklehrer einer Klasse prüft bei seinen Schülern nun nacheinander die Hausaufgaben. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der bereits befragten Schüler, die ihre Hausaufgaben erledigt haben, bis zum Auftreten des ersten Schülers ohne Hausaufgabe.

1. Wie ist die Zufallsvariable X verteilt? Geben Sie die entsprechenden Parameter der Verteilung an.

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der 10. bzw. der 20. Schüler der erste ohne Hausaufgaben ist.

Lösung zu Hausaufgabe 63
Teilaufgabe 1: X ist geometrisch verteilt mit Parameter $p = 0.1$.
Teilaufgabe 2: Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten erhalten wir

$$\begin{aligned} P(X = 10) &= 0.9^9 \cdot 0.1 \approx 0.0387, \\ P(X = 20) &= 0.9^{19} \cdot 0.1 \approx 0.0135. \end{aligned}$$