

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 21

Sommersemester 2017

Die Abgabe zu Blatt 21 erfolgt in der Woche vom **3.7. bis 7.7.2017**.

Fragen und Hinweise bitte an bergold@ma.tum.de.

Übungen (Zentraler Grenzwertsatz)

Zentraler Grenzwertsatz:

Auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) sei eine Folge X_1, X_2, \dots von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbf{V}[X_i] > 0$ gegeben. Ist

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

und S_n^* die Standardisierung von S_n , so konvergieren die Verteilungsfunktionen $F_{S_n^*}$ von S_n^* gleichmäßig gegen die Gauß-Funktion Φ , kurz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{S_n^*} = \Phi.$$

Aufgabe 1

Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen. Dabei seien die einzelnen Würfe unabhängig voneinander. Für $j = 1, 2, 3$ bezeichne X_j das Ergebnis im Wurf j . Des Weiteren sei X die Augensumme der Würfe.

1. Bestimmen Sie $P(X = k)$ für $k \in X(\Omega)$.
2. Bestimmen Sie $P(8 \leq X \leq 12)$.
3. Nähern Sie den Wert von $P(8 \leq X \leq 12)$ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes ohne und mit Stetigkeitskorrektur.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 61

Gegeben seien n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit unbekanntem Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 = 0.01$. Außerdem sei

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Wie muss n gewählt werden, sodass der Wert $|\bar{X}_n - \mu|$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% kleiner ist als 0.025? Wenden Sie für Ihre Berechnungen die Ungleichung von Chebyshev an.

Hausaufgabe 62

Aus einer Urne mit fünf roten und zehn schwarzen Kugeln wird 3600 mal mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Ziehungen, bei denen eine rote Kugel gezogen wird. Für $i = 1, \dots, 3600$ sei insbesondere $X_i = 1$, falls die i -te Kugel rot ist und $X_i = 0$ sonst.

1. Berechnen Sie $\mathbf{E}[X_i]$ und $\mathbf{V}[X_i]$.
2. Berechnen Sie $\mathbf{E}[X]$ und $\mathbf{V}[X]$. (Zwischenergebnis: $\mathbf{E}[X] = 1200$ und $\mathbf{V}[X] = 800$)
3. Ermitteln Sie mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $P(1000 < X < 1400)$.
4. Approximieren Sie den Wert von $P(1000 < X < 1400)$ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Hausaufgabe 63

In der Abschlussklasse einer Schule haben 10% der Schüler ihre Hausaufgaben nicht erledigt. Der Mathematiklehrer einer Klasse prüft bei seinen Schülern nun nacheinander die Hausaufgaben. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der bereits befragten Schüler, die ihre Hausaufgaben erledigt haben, bis zum Auftreten des ersten Schülers ohne Hausaufgabe.

1. Wie ist die Zufallsvariable X verteilt? Geben Sie die entsprechenden Parameter der Verteilung an.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der 10. bzw. der 20. Schüler der erste ohne Hausaufgaben ist.