Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 20

Sommersemester 2017

Lösungshinweise

Hausaufgabe 58
Ein Flugzeug eines bestimmten Typs fasst 200 Passagiere. Wie viele Reservierungen darf die Fluggesellschaft akzeptieren, wenn erfahrungsgemäß eine gebuchte Reservierung mit Wahrscheinlichkeit 20% annulliert wird und die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens 25% sein soll?

Hinweis: Benutzen Sie für Ihre Berechnung den Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace mit Stetigkeitskorrektur.

Lösung zu Hausaufgabe 58
Es sei Y_n die Anzahl der vorgenommenen Annullierungen, unter der Voraussetzung, dass die Fluggesellschaft $n \geq 201$ Reservierungen akzeptiert. Nach Aufgabenstellung erhalten wir $Y_n \sim \mathrm{Bin}(n, 0.2)$. Gesucht ist also die größte natürliche Zahl $n \geq 201$ mit $P(200 < n - Y_n) \leq 0.25$. Es folgt

$$P(200 < n - Y_n) = P(0 \leq Y_n \leq n - 201).$$

Unter Verwendung der Stetigkeitskorrektur gilt weiterhin

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{0 - 0.5 - \mathbf{E}[Y_n]}{\sqrt{\mathbf{V}[Y_n]}} \leq \frac{Y_n - \mathbf{E}[Y_n]}{\sqrt{\mathbf{V}[Y_n]}} \leq \frac{n - 201 + 0.5 - \mathbf{E}[Y_n]}{\sqrt{\mathbf{V}[Y_n]}}\right) \\ &= P\left(\frac{-0.5 - 0.2n}{0.4\sqrt{n}} \leq Y^* \leq \frac{0.8n - 200.5}{0.4\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{0.8n - 200.5}{0.4\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5 - 0.2n}{0.4\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Da $n \geq 201$ folgern wir

$$\Phi\left(\frac{0.8n - 200.5}{0.4\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5 - 0.2n}{0.4\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{0.8n - 200.5}{0.4\sqrt{n}}\right).$$

Wir suchen also die größte natürliche Zahl $n \geq 201$ mit

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{0.8n - 200.5}{0.4\sqrt{n}}\right) \leq 0.25 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{0.8n - 200.5}{0.4\sqrt{n}} \leq \Phi^{-1}(0.25) \approx -0.6745 \\ &\Leftrightarrow \quad n \leq 245.34. \end{aligned}$$

Die Fluggesellschaft darf also maximal 245 Reservierungen akzeptieren.

Hausaufgabe 59
Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien unabhängig und normalverteilt mit

$$\mathbf{E}[X_1] = 1, \quad \mathbf{E}[X_2] = 3, \quad \mathbf{V}[X_1] = \mathbf{V}[X_2] = 2.$$

Betrachten Sie die Zufallsvariable $Z = X_1 + X_2$.

1. Berechnen Sie $\mathbf{E}[Z]$, sowie $\mathbf{V}[Z]$.

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(2 \leq Z \leq 6)$.

Lösung zu Hausaufgabe 59
Teilaufgabe 1: Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] = 1 + 3 = 4,\\ \mathbf{V}[Z] = \mathbf{V}[X_1 + X_2] = \mathbf{V}[X_1] + \mathbf{V}[X_2] = 2 + 2 = 4.\end{aligned}$$

Teilaufgabe 2: Aus Teil 1 folgt $Z \sim \mathcal{N}(4, 4)$ und die Standardisierung Z^* ist gegeben durch

$$Z^* = \frac{Z - \mathbf{E}[Z]}{\sqrt{V[Z]}} = \frac{Z - 4}{2}.$$

Somit erhalten wir

$$P(2 \leq Z \leq 6) = P(-1 \leq Z^* \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.6826.$$

Hausaufgabe 60
Eine Maschine fertigt Achsen mit einem Durchmesser von X, eine weitere Maschine fertigt zugehörige Lager mit Innendurchmesser Y. Im Folgenden seien alle Maße in der gleichen Einheit gegeben. X kann als (μ_1, σ_1^2)-normalverteilt, Y davon unabhängig, als (μ_2, σ_2^2)-normalverteilt angenommen werden. Insbesondere sei

$$\mu_1 = 0.70, \quad \mu_2 = 0.71, \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Eine Achse passt in ein Lager, wenn der Innendurchmesser des Lagers mindestens um 0.004 und höchstens um 0.03 größer ist als der Durchmesser der Achse. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig herausgegriffene Achse in ein zufällig gewähltes Lager passt.

Lösung zu Hausaufgabe 60
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X + 0.004 \leq Y \leq X + 0.03)$. Im Folgenden sei $Z := Y - X$. Es gilt $Z \sim \mathcal{N}(\mu_2 - \mu_1, \sigma_2^2 + \sigma_1^2) = \mathcal{N}(0.01, 10^{-4})$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}&P(X + 0.004 \leq Y \leq X + 0.03) = P(0.004 \leq Y - X \leq 0.03)\\ &= P(0.004 \leq Z \leq 0.03) = P(-0.6 \leq Z^* \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-0.6) \approx 0.7030.\end{aligned}$$

Das heißt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 70.3% eine zufällig herausgegriffene Achse in ein zufällig gewähltes Lager passt.