

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 20

Sommersemester 2017

Die Abgabe zu Blatt 20 erfolgt in der Woche vom **26.6. bis 30.6.2017**.
Fragen und Hinweise bitte an bergold@ma.tum.de.

Übungen (Normalverteilung, Grenzwertsätze)

Aufgabe 1

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit den Parametern

1. $\mu = 9$ und $\sigma^2 = 4$. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \leq 7), \quad P(8 \leq X \leq 14).$$

2. $\mu = 7.55$ und $\sigma^2 = 1$. Berechnen Sie $P(X > 9)$.
3. $\mu = 5$ und $\sigma^2 = 2$. Berechnen Sie $P(X \leq 7)$.

Aufgabe 2

Es gilt folgender Satz: *Sind X_1 und X_2 unabhängig und normalverteilt mit $\mathbf{E}[X_i] = \mu_i$ und $\mathbf{V}[X_i] = \sigma_i$ für $i = 1, 2$, so ist $X_1 + X_2$ normalverteilt mit $\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mu_1 + \mu_2$ und $\mathbf{V}[X_1 + X_2] = \sigma_1 + \sigma_2$.*

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit $\mu = 2$ und $\sigma^2 = 1$. Weiter sei $Y := 1 - 2X$.

1. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y .
2. Welche Verteilung besitzt Y ? Geben Sie die zugehörigen Parameter an.
3. Berechnen Sie $P(-1 \leq Y \leq 3)$.
4. Bestimmen Sie $\mathbf{Cov}[X, Y]$.

Aufgabe 3 (Diese Aufgabe erstellen Sie bitte mit RStudio)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [0, 1]$ sei $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Im Folgenden sei $n = 8$ und $p = 0.5$.

1. Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X .
2. Für $\mu = \mathbf{E}[X]$ und $\sigma = \sqrt{\mathbf{V}[X]}$ betrachten Sie die Standardisierung

$$X^* := \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X^* .

3. Für $k = 0, \dots, n+1$ definieren wir die Stützstellen $s_k := (k - \frac{1}{2} - \mu)/\sigma$. Des Weiteren sei die Treppenfunktion $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$\psi(t) := \begin{cases} \sigma \cdot b_{n,p}(k), & \text{falls } s_k \leq t < s_{k+1}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeichnen Sie die Treppenfunktion ψ in den Plot aus Teilaufgabe 2 ein.

4. Betrachten Sie die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zeichnen Sie die Funktion φ in den Plot aus Teilaufgabe 3 ein. Interpretieren Sie die Zeichnung in Bezug auf den lokalen Grenzwertsatz.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 58

Ein Flugzeug eines bestimmten Typs fasst 200 Passagiere. Wie viele Reservierungen darf die Fluggesellschaft akzeptieren, wenn erfahrungsgemäß eine gebuchte Reservierung mit Wahrscheinlichkeit 20% annulliert wird und die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens 25% sein soll?

Hinweis: Benutzen Sie für Ihre Berechnung den Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace mit Stetigkeitskorrektur.

Hausaufgabe 59

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien unabhängig und normalverteilt mit

$$\mathbf{E}[X_1] = 1, \quad \mathbf{E}[X_2] = 3, \quad \mathbf{V}[X_1] = \mathbf{V}[X_2] = 2.$$

Betrachten Sie die Zufallsvariable $Z = X_1 + X_2$.

1. Berechnen Sie $\mathbf{E}[Z]$, sowie $\mathbf{V}[Z]$.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(2 \leq Z \leq 6)$.

Hausaufgabe 60

Eine Maschine fertigt Achsen mit einem Durchmesser von X , eine weitere Maschine fertigt zugehörige Lager mit Innendurchmesser Y . Im Folgenden seien alle Maße in der gleichen Einheit gegeben. X kann als (μ_1, σ_1^2) -normalverteilt, Y davon unabhängig, als (μ_2, σ_2^2) -normalverteilt angenommen werden. Insbesondere sei

$$\mu_1 = 0.70, \quad \mu_2 = 0.71, \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Eine Achse passt in ein Lager, wenn der Innendurchmesser des Lagers mindestens um 0.004 und höchstens um 0.03 größer ist als der Durchmesser der Achse. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig herausgegriffene Achse in ein zufällig gewähltes Lager passt.

Tabelle der Normalverteilung

Tabelle des Integrals $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$. Zum Beispiel $\Phi(1.23) = 0.8907$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000