

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK

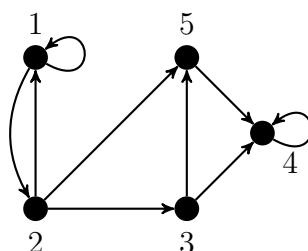
Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 19

Sommersemester 2017

Lösungshinweise

Hausaufgabe 55

Betrachten Sie eine Markovkette mit folgendem Übergangsgraphen:



1. Bestimmen Sie alle kommunizierenden Klassen.
2. Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Teilmengen.
3. Ist die Markovkette irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Hausaufgabe 55

Teilaufgabe 1: Die kommunizierenden Klassen lauten: $\{1, 2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$.

Teilaufgabe 2: Die abgeschlossenen Teilmengen lauten: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{4\}$.

Teilaufgabe 3: Die Markovkette besitzt vier kommunizierende Klassen und ist somit nicht irreduzibel.

Hausaufgabe 56

Sei $E = [4]$ und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix

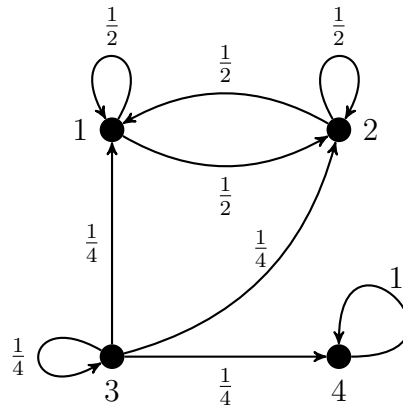
$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in [0, 1]^{[4] \times [4]}$$

1. Zeichnen Sie den Übergangsgraphen.
2. Bestimmen Sie alle kommunizierenden Klassen.
3. Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Teilmengen.

4. Ist die Markovkette irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Hausaufgabe 56

Teilaufgabe 1:



Teilaufgabe 2: Die kommunizierenden Klassen lauten: $\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}$.

Teilaufgabe 3: Die abgeschlossenen Teilmengen lauten: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{4\}$.

Teilaufgabe 4: Die Markovkette besitzt drei kommunizierende Klassen und ist somit nicht irreduzibel.

Hausaufgabe 57

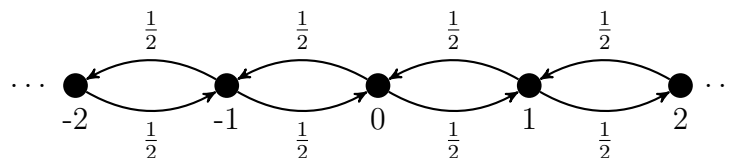
Geben Sie ein Beispiel für eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $E = \mathbb{Z}$, sodass jeder Zustand die Periode 2 besitzt. Zeichnen Sie auch den zugehörigen Übergangsgraphen.

Lösung zu Hausaufgabe 57

Betrachte eine Markovkette mit Übergangsmatrix aus Hausaufgabe 52:

$$\Pi(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } j \in \{i - 1, i + 1\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Der Übergangsgraph ist gegeben durch:



Offensichtlich besitzt jeder Zustand die Periode 2.