Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 19

Sommersemester 2017

Die Abgabe zu Blatt 19 erfolgt in der Woche vom **19.6. bis 23.6.2017.**
Fragen und Hinweise bitte an bergold@ma.tum.de.

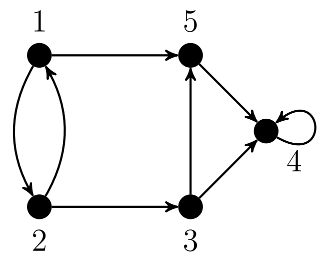
Übungen (Markovketten)

Aufgabe 1
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix Π. Für $i, j \in E$ sagen wir, dass j von i *erreichbar* ist ($i \to j$), falls $n \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $\Pi^n(i, j) > 0$. Des Weiteren sagen wir, dass i und j *kommunizieren* ($i \leftrightarrow j$), falls $i \to j$ und $j \to i$.

Zeigen Sie, dass $i \leftrightarrow j$ eine Äquivalenzrelation ist. Die entsprechenden Äquivalenzklassen heißen die *kommunizierenden Klassen*.

Aufgabe 2
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix Π. Für $i \in E$ sei $\mathcal{T}(i) := \{n \geq 1 : \ \Pi^n(i, i) > 0\}$. Der größte gemeinsame Teiler $d_i := \mathrm{ggT}(\mathcal{T}(\mathrm{i}))$ von $\mathcal{T}(i)$ heißt *Periode* von i. Insbesondere sei $\mathrm{ggT}(\emptyset) := \infty$. Falls $d_i = 1$, so heißt i *aperiodisch*. Eine Markovkette heißt *aperiodisch*, wenn alle Zustände aperiodisch sind. Sonst heißt die Markovkette *periodisch*.

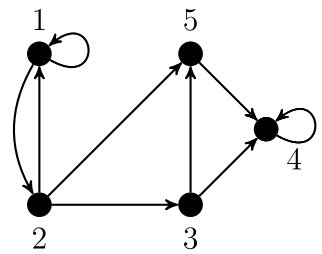
Betrachten Sie nun eine Markovkette mit folgendem Übergangsgraphen:



Bestimmen Sie $\mathcal{T}(i)$ für $i = 1, ..., 5$. Ist die Markovkette irreduzibel?

Hausaufgaben

Hausaufgabe 55
Betrachten Sie eine Markovkette mit folgendem Übergangsgraphen:



1. Bestimmen Sie alle kommunizierenden Klassen.
2. Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Teilmengen.
3. Ist die Markovkette irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 56
Sei $E = [4]$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in [0,1]^{[4]\times[4]}$$

1. Zeichnen Sie den Übergangsgraphen.
2. Bestimmen Sie alle kommunizierenden Klassen.
3. Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Teilmengen.
4. Ist die Markovkette irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 57
Geben Sie ein Beispiel für eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $E = \mathbb{Z}$, sodass jeder Zustand die Periode 2 besitzt. Zeichnen Sie auch den zugehörigen Übergangsgraphen.