Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 18

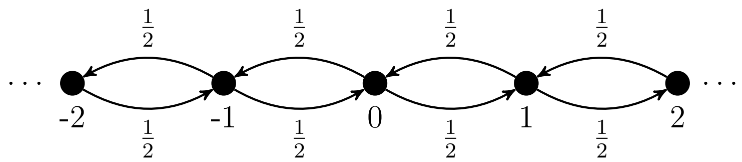
Sommersemester 2017

Lösungshinweise

Hausaufgabe 52
Zeichnen Sie den Übergangsgraphen zu folgender Übergangsmatrix:

$$\Pi(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } j \in \{i-1, i+1\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}, \quad i,j \in \mathbb{Z}.$$

Lösung zu Hausaufgabe 52



Hausaufgabe 53
Für $p, q \in [0,1]$ sei

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -p & p \\ q & -q \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Es gilt $B^2 = -(p+q)B$.

2. Für $p + q > 0$ gilt

$$A^k = E + \frac{1}{p+q}B - \frac{(1-p-q)^k}{p+q}B, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

   wobei E die Einheitsmatrix bezeichne.

3. Bestimmen Sie $\lim_{k\to\infty} A^k$ in Abhängigkeit von p und q.

Lösung zu Hausaufgabe 53
Teilaufgabe 1: Es gilt

$$B^2 = \begin{pmatrix} p^2 + pq & -p^2 - pq \\ -pq - q^2 & pq + q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(p+q) & -p(p+q) \\ -q(p+q) & q(p+q) \end{pmatrix} = -(p+q)B.$$

Teilaufgabe 2: Es sei $p+q>0$. Aus Teil 1 folgern wir für $n \geq 2$:

$$B^n = B^2 \cdot B^{n-2} = -(p+q)B^{n-1} = (-1)^{n-1}(p+q)^{n-1}B$$

und somit:

$$\begin{aligned}
A^k = (B+E)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} B^n E^{k-n} &= E + kB + \sum_{n=2}^{k} \binom{k}{n} (-1)^{n-1}(p+q)^{n-1}B \\
&= E + kB - \frac{B}{p+q} \sum_{n=2}^{k} \binom{k}{n} (-1)^n (p+q)^n \\
&= E + kB - \frac{B}{p+q} \left(-1 + k(p+q) + \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (-1)^n (p+q)^n \right) \\
&= E + kB - \frac{B}{p+q} \left(-1 + k(p+q) + (1-p-q)^k \right) \\
&= E + \frac{1}{p+q} B - \frac{(1-p-q)^k}{p+q} B.
\end{aligned}$$

Teilaufgabe 3:
Fall 1 ($p+q=0$): In diesem Fall ist $A=E$ und daher $A^k = E$ für alle k. Somit folgt

$$\lim_{k\to\infty} A^k = E.$$

Fall 2 ($0 < p+q < 2$): In diesem Fall gilt $|1-p-q| \in [0,1)$ und somit

$$\lim_{k\to\infty} A^k = E + \frac{1}{p+q}B - \lim_{k\to\infty} \frac{(1-p-q)^k}{p+q} B = E + \frac{1}{p+q} B.$$

Fall 3 ($p+q=2$): In diesem Fall gilt

$$A^k = E + \frac{1}{2}B - \frac{(-1)^k}{2}B.$$

Somit existiert $\lim_{k\to\infty} A^k$ nicht.

Hausaufgabe 54
Es sei E eine nichtleere, abzählbare Menge, sowie $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit Werten in E auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeigen Sie, dass $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette ist. Welche Eigenschaft muss die Folge $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ darüberhinaus erfüllen, um eine homogene Markovkette zu sein. Beschreiben Sie für diesen Fall auch die zugehörige Übergangsmatrix Π.

Lösung zu Hausaufgabe 54
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $i, j, i_0, ..., i_{n-1} \in E$ mit $P(X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) > 0$. Mit

der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen folgt dann

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = j|\ X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) \\
=& \frac{P(X_{n+1} = j, X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)}{P(X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)} \\
=& \frac{P(X_{n+1} = j) \cdot P(X_0 = i_0) \cdot ... \cdot P(X_{n-1} = i_{n-1} \cdot P(X_n = i)}{P(X_0 = i_0) \cdot ... \cdot P(X_{n-1} = i_{n-1} \cdot P(X_n = i)} \\
=& P(X_{n+1} = j) = \frac{P(X_{n+1} = j) \cdot P(X_n = i)}{P(X_n = i)} = P(X_{n+1} = j|\ X_n = i).
\end{aligned}$$

Somit ist $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette. Insbesondere ist die Markovkette zeitlich homogen, falls $P(X_{n+1} = j)$ nicht von n abhängt. Das bedeutet, dass die Zufallsvariablen X_t für $t \in \mathbb{N}$ identisch verteilt sind. Die Verteilung von X_0 ist jedoch beliebig. Die Übergangsmatrix ist gegeben durch $\Pi(i, j) = P(X_1 = j)$, für alle $i, j \in E$.