Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 18

Sommersemester 2017

Die Abgabe zu Blatt 18 erfolgt in der Woche vom **5.6. bis 9.6.2017.**
Fragen und Hinweise bitte an bergold@ma.tum.de.

Übungen (Stochastische Matrizen und Markovketten)

Aufgabe 1
Es sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum E und Übergangsmatrix Π. Für Zustände $i, j \in E$ besitzt der sogenannte *Übergangsgraph* eine Kante von i nach j, wenn die Markovkette mit positiver Wahrscheinlichkeit in einem Schritt von i nach j gelangen kann. Man beschriftet die Kante (i, j) dann mit $\Pi(i, j)$.

Betrachten Sie nun $E = [3]$ sowie

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \in [0,1]^{E\times E}.$$

1. Zeichnen Sie den Übergangsgraphen.

2. Es sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix Π. Außerdem gelte $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 3) = 0.25$ sowie $P(X_0 = 2) = 0.5$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2)$.

Aufgabe 2
Zum Zeitpunkt $n = 0$ enthalte eine Urne r rote und w weiße Kugeln, wobei $r, w \in \mathbb{N}$. Zu jedem weiteren Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ wird zufällig eine Kugel aus der Urne gezogen und zusammen mit einer weiteren Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Dies ist das sogenannte *Pólyasche Urnenmodell.* $X_n := (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$ bezeichne die Anzahl der roten $(X_n^{(1)})$ beziehungsweise der weißen $(X_n^{(2)})$ Kugeln in der Urne nach n Zügen.

1. Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette ist. Geben Sie auch den Zustandsraum und die Übergangsmatrix an.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun $Y_n := X_n^{(1)}$ die Anzahl der roten Kugeln in der Urne nach n Zügen. Zeigen Sie, dass $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette ist, die aber nicht zeitlich homogen ist.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 52
Zeichnen Sie den Übergangsgraphen zu folgender Übergangsmatrix:

$$\Pi(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } j \in \{i-1, i+1\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}, \quad i,j \in \mathbb{Z}.$$

Hausaufgabe 53
Für $p,q \in [0,1]$ sei

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -p & p \\ q & -q \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Es gilt $B^2 = -(p+q)B$.
2. Für $p+q > 0$ gilt
$$A^k = E + \frac{1}{p+q}B - \frac{(1-p-q)^k}{p+q}B, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$
wobei E die Einheitsmatrix bezeichne.
3. Bestimmen Sie $\lim_{k\to\infty} A^k$ in Abhängigkeit von p und q.

Hausaufgabe 54
Es sei E eine nichtleere, abzählbare Menge, sowie $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit Werten in E auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeigen Sie, dass $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette ist. Welche Eigenschaft muss die Folge $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ darüberhinaus erfüllen, um eine homogene Markovkette zu sein. Beschreiben Sie für diesen Fall auch die zugehörige Übergangsmatrix Π.