Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 17

Sommersemester 2017

Lösungshinweise

Hausaufgabe 49
Wir betrachten ein Spiel, das nach folgenden Regeln funktioniert:
Jeder Spieler erhält zu Beginn ein Spielfeld, auf dem Zahlen in fünf Zeilen und fünf Spalten in folgender Weise angeordnet sind:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Dabei seien die Zahlen in Zeile $i = 1, ..., 5$ paarweise verschieden und zufällig aus der Menge $\{(i-1) \cdot 15 + 1, ..., (i-1) \cdot 15 + 15\}$ entnommen. Der Spielleiter zieht nun 22 verschiedene Zahlen zwischen 1 und 75. Ein Spieler gewinnt, falls alle Zahlen gezogen werden, die auf seinem Spielbrett in einer Zeile (ohne Reihenfolge) stehen. Genauer gesagt sei $\{b_1, ..., b_{22}\}$ die Menge der Zahlen, die der Spielleiter gezogen hat. Dann hat ein Spieler gewonnen, falls $\{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}\} \subset \{b_1, ..., b_{22}\}$ für mindestens ein $i \in [5]$ gilt.

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es ein Spielbrett anzuordnen?

2. Wie viele Möglichkeiten hat der Spielleiter die Zahlen zu ziehen?

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit der ein Spieler gewinnt? Würden Sie an diesem Spiel teilnehmen?

Hinweis zur Teilaufgabe 3: Betrachten Sie für $i = 1, ..., 5$ das Ereignis A_i: „Alle Zahlen aus Zeile i wurden gezogen.“

Lösung zu Hausaufgabe 49
Teilaufgabe 1: Für jede der fünf Zeilen werden unabhängig voneinander fünf Zahlen, mit Beachtung der Reihenfolge, aus einer Menge mit 15 Zahlen gezogen. Somit gibt es

insgesamt $\left(15^{\underline{5}}\right)^5 = (15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11)^5$ Möglichkeiten.

Teilaufgabe 2: Der Spielleiter zieht 22 Zahlen, ohne Beachtung der Reihenfolge, aus einer Menge mit 75 Zahlen. Somit gibt es $\binom{75}{22}$ Möglichkeiten.

Teilaufgabe 3: Mit Hilfe der Ereignisse A_i aus dem Hinweis ist die Gewinnwahrscheinlichkeit gegeben durch

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)$$

wobei P die Gleichverteilung auf $\Omega_4(75, 22)$ ist. Gesucht ist also $\#\bigcup_{i=1}^{5} A_i$. Mit Hilfe der Formel für Inklusion und Exklusion erhalten wir

$$\#\bigcup_{i=1}^{5} A_i = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [5]} (-1)^{\#I+1} \# \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

Insbesondere gilt für $\emptyset \neq I \subset [5]$ mit $\#I \in [4]$:

$$\#\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \binom{5}{\#I}\binom{\#I \cdot 5}{\#I \cdot 5}\binom{75 - \#I \cdot 5}{22 - \#I \cdot 5} = \binom{5}{\#I}\binom{75 - \#I \cdot 5}{22 - \#I \cdot 5}$$

sowie $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = 0$. Somit erhalten wir

$$\#\bigcup_{i=1}^{5} A_i = \binom{5}{1}\binom{70}{17} - \binom{5}{2}\binom{65}{12} + \binom{5}{3}\binom{60}{7} - \binom{5}{4}\binom{55}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit mit der ein Spieler gewinnt liegt demnach bei

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = \frac{\binom{5}{1}\binom{70}{17} - \binom{5}{2}\binom{65}{12} + \binom{5}{3}\binom{60}{7} - \binom{5}{4}\binom{55}{2}}{\binom{75}{22}} \approx 0.8\%.$$

Hausaufgabe 50

Ein faires Tetraeder, beschriftet mit den Zahlen $1, 2, 3$ und 4, wird zweimal geworfen. Die Zufallsvariable $Z_i,\ i = 1, 2$ bezeichne die Augenzahl beim i-ten Wurf. Des Weiteren sei $X^- := Z_1 - Z_2$ die Differenz, sowie $X^+ := Z_1 + Z_2$ die Summe der beiden Würfe.

1. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen X^-.

2. Sind die Zufallsvariablen X^- und X^+ unkorreliert?

Wir wiederholen das oben beschriebene Experiment n mal unabhängig voneinander. Dabei entstehen die unabhängigen Zufallsvariablen $X_1^-, X_2^-, ..., X_n^-$. Im Folgenden bezeichne $Y := \frac{1}{n}(X_1^- + ... + X_n^-)$ die mittlere Differenz der n Würfe. Wie oft muss gewürfelt werden, wenn Y mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% um weniger als 2 vom Erwartungswert abweichen soll?

Lösung zu Hausaufgabe 50
Teilaufgabe 1: Die Zufallsvariablen Z_1 und Z_2 sind identisch und unabhängig verteilt. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X^-] &= \mathbf{E}[Z_1 - Z_2] = \mathbf{E}[Z_1] - \mathbf{E}[Z_2] = \mathbf{E}[Z_1] - \mathbf{E}[Z_1] = 0, \\
\mathbf{V}[X^-] &= \mathbf{E}[(X^- - \mathbf{E}[X^-])^2] = \mathbf{E}[(X^-)^2] \\
&= \mathbf{E}[(Z_1 - Z_2)^2] = \mathbf{E}[Z_1^2] - 2\mathbf{E}[Z_1 Z_2] + \mathbf{E}[Z_2^2] \\
&= 2\mathbf{E}[Z_1^2] - 2\mathbf{E}[Z_1]\mathbf{E}[Z_2] = 2\left(\mathbf{E}[Z_1^2] - \mathbf{E}[Z_1]^2\right) \\
&= 2\left(\frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Teilaufgabe 2: Für die Kovarianz von X^- und X^+ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}[X^-, X^+] &= \mathbf{E}[X^- X^+] - \mathbf{E}[X^-]\mathbf{E}[X^+] = \mathbf{E}[X^- X^+] \\
&= \mathbf{E}[(Z_1 - Z_2)(Z_1 + Z_2)] = \mathbf{E}[Z_1^2] - \mathbf{E}[Z_2^2] = 0.
\end{aligned}$$

Deshalb sind X^- und X^+ unkorreliert.

Für die Zufallsvariable Y folgt mit der Ungleichung von Chebyshev

$$P(|Y - \mu_Y| < 2) \geq 1 - \frac{\mathbf{V}[Y]}{2^2} = 1 - \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{5}{2}}{4} = 1 - \frac{5}{8n}$$

Wir suchen also die kleinste natürliche Zahl n sodass

$$1 - \frac{5}{8n} \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 12.5.$$

Es muss also mindestens 13 mal gewürfelt werden.

Hausaufgabe 51
Geben Sie ein Beispiel für zwei unkorrelierte Zufallsvariablen an, die abhängig sind.

Lösung zu Hausaufgabe 51
Es sei $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ und P die Gleichverteilung auf Ω. Außerdem sei

$$\begin{aligned}
&X\colon \Omega \to \mathbb{R},\ X(\omega) = \omega, \\
&Y\colon \Omega \to \mathbb{R},\ Y(\omega) = \mathbf{1}_{\{0\}}(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\mathbf{E}[X] = 0$ und da $X(\omega)Y(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$ erhalten wir

$$\mathbf{Cov}[X, Y] = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = 0 - 0 = 0.$$

Des Weiteren gilt

$$P(X = 0, Y = 1) = P(\{0\}) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = P(X = 0)P(Y = 1).$$

Somit sind die Zufallsvariablen unkorreliert und abhängig.