Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 17

Sommersemester 2017

Die Abgabe zu Blatt 17 erfolgt in der Woche vom **29.5. bis 2.6.2017.**
Fragen und Hinweise bitte an bergold@ma.tum.de.

Übungen (Kovarianz, Korrelation)

Aufgabe 1
Es sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum sowie X_1 und X_2 zwei beliebige Zufallsvariablen auf Ω. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$\mathbf{E}[|X_1X_2|] \le \sqrt{\mathbf{E}[X_1^2]\mathbf{E}[X_2^2]}, \qquad |\mathbf{Cov}(X_1, X_2)| \le \sqrt{\mathbf{V}[X_1]\mathbf{V}[X_2]}$$

Aufgabe 2
Beweisen Sie folgenden Satz:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und X, Y Zufallsvariablen mit $0 < \mathbf{V}[X], \mathbf{V}[Y] < \infty$. Die erwartete quadratische Abweichung $\mathbf{E}[(Y-(aX+b))^2]$ is minimal, wenn a und b wie folgt gewählt werden:

$$a = a^* = \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \quad b = b^* = \mathbf{E}[Y] - a^* \cdot \mathbf{E}[X].$$

Insbesondere gilt $P(Y = aX + b) = 1$ genau dann, wenn $|\rho_{XY}| = 1$.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 49
Wir betrachten ein Spiel, das nach folgenden Regeln funktioniert:
Jeder Spieler erhält zu Beginn ein Spielfeld, auf dem Zahlen in fünf Zeilen und fünf Spalten in folgender Weise angeordnet sind:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Dabei seien die Zahlen in Zeile $i = 1, ..., 5$ paarweise verschieden und zufällig aus der Menge $\{(i-1) \cdot 15 + 1, ..., (i-1) \cdot 15 + 15\}$ entnommen. Der Spielleiter zieht nun 22 verschiedene Zahlen zwischen 1 und 75. Ein Spieler gewinnt, falls alle Zahlen gezogen werden, die auf seinem Spielbrett in einer Zeile (ohne Reihenfolge) stehen. Genauer gesagt sei $\{b_1, ..., b_{22}\}$ die Menge der Zahlen, die der Spielleiter gezogen hat. Dann hat ein Spieler gewonnen, falls $\{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}\} \subset \{b_1, ..., b_{22}\}$ für mindestens ein $i \in [5]$ gilt.

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es ein Spielbrett anzuordnen?
2. Wie viele Möglichkeiten hat der Spielleiter die Zahlen zu ziehen?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit der ein Spieler gewinnt? Würden Sie an diesem Spiel teilnehmen?

Hinweis zur Teilaufgabe 3: Betrachten Sie für $i = 1, ..., 5$ das Ereignis A_i: „Alle Zahlen aus Zeile i wurden gezogen."

Hausaufgabe 50
Ein faires Tetraeder, beschriftet mit den Zahlen $1, 2, 3$ und 4, wird zweimal geworfen. Die Zufallsvariable $Z_i,\ i = 1, 2$ bezeichne die Augenzahl beim i-ten Wurf. Des Weiteren sei $X^- := Z_1 - Z_2$ die Differenz, sowie $X^+ := Z_1 + Z_2$ die Summe der beiden Würfe.

1. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen X^-.
2. Sind die Zufallsvariablen X^- und X^+ unkorreliert?

Wir wiederholen das oben beschriebene Experiment n mal unabhängig voneinander. Dabei entstehen die unabhängigen Zufallsvariablen $X_1^-, X_2^-, ..., X_n^-$. Im Folgenden bezeichne $Y := \frac{1}{n}(X_1^- + ... + X_n^-)$ die mittlere Differenz der n Würfe. Wie oft muss gewürfelt werden, wenn Y mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% um weniger als 2 vom Erwartungswert abweichen soll?

Hausaufgabe 51
Geben Sie ein Beispiel für zwei unkorrelierte Zufallsvariablen an, die abhängig sind.