Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 16

Sommersemester 2017

Lösungshinweise

Hausaufgabe 46

Es seien $X_1, ..., X_n$ Zufallsvariablen (nicht notwendigerweise unabhängig), sodass X_k Bernoulli-verteilt ist mit Parameter $p_k \in (0,1)$ für $1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie:

$$\mathbf{V}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] \leq \left(\sum_{k=1}^n p_k\right)\left(\sum_{k=1}^n 1 - p_k\right)$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\mathbf{E}[X_iX_j] \leq \mathbf{E}[X_i]$ für $1 \leq i \neq j \leq n$.

Lösung zu Hausaufgabe 46

Für $1 \leq i \neq j \leq n$ erhalten wir $\{X_i = 1, X_j = 1\} \subset \{X_i = 1\}$ und somit

$$\mathbf{E}[X_iX_j] = 1 \cdot P(X_i = 1, X_j = 1) \leq 1 \cdot P(X_i = 1) = \mathbf{E}[X_i].$$

Mit $\mathbf{E}[X_i^2] = \mathbf{E}[X_i] = p_i$ folgern wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] &= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right] - \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right]^2 \\
&= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n X_iX_j\right] - \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k]\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\left[X_k^2\right] + \sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \mathbf{E}\left[X_iX_j\right] - \left(\sum_{k=1}^n p_k\right)^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^n p_k + \sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \mathbf{E}\left[X_i\right] - \left(\sum_{k=1}^n p_k\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^n p_k + \sum_{k=1}^n (n-1)p_k - \left(\sum_{k=1}^n p_k\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^n p_k \left(1 + (n-1) - \sum_{k=1}^n p_k\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^n p_k\right)\left(\sum_{k=1}^n 1 - p_k\right).
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 47
Nach dem schriftlichen Abitur trifft sich der Mathematik-Leistungskurs in der Eisdiele „La dolce vita“. Der Pächter Roberto ist gerade ungehalten, weil er in einem Karton 4 zerbrochene Eiswaffeln entdeckt hat. Roberto bekommt seine Eiswaffeln in Kartons zu je 48 Stück. Er berichtet, dass er schon von der letzten Lieferung aus 50 Kartons insgesamt 72 Waffeln wegwerfen musste, weil sie zerbrochen waren. Die Kollegiaten geraten ins Fachsimpeln. Im Folgenden wird angenommen, dass im Mittel der Anteil an zerbrochenen Waffeln genau dem aus der letzten Lieferung von 2400 Waffeln entspricht und dass die zerbrochenen Waffeln zufällig verteilt sind.

1. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Karton genau 4 Waffeln zerbrochen sind?

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der zerbrochenen Waffeln in einer Lieferung von 50 Kartons um höchstens 12 vom Erwartungswert abweicht? Schätzen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der Ungleichung von Chebyshev ab.

Lösung zu Hausaufgabe 47
Für $i = 1, ..., 50$ bezeichne X_i die Anzahl der zerbrochenen Eiswaffeln in Karton i. Darüber hinaus sei $Y := X_1 + ... + X_{50}$ die Anzahl der zerbrochenen Waffel der gesamten Lieferung. Dann gilt $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ mit $n = 48$ und $p = 72/2400 = 0.03$. Da die Zufallsvariablen X_i unabhängig sind gilt außerdem $Y \sim \mathrm{Bin}(50 \cdot n, p)$.

Teilaufgabe 1: Gesucht ist $P(X = 4)$. Es gilt:

$$P(X = 4) = \binom{48}{4} \cdot 0.03^4 \cdot 0.97^{44} \approx 4.13\%.$$

Teilaufgabe 2: Gesucht ist $P(|Y - \mathbf{E}[Y]| \leq 12)$. Der Erwartungswert und die Varianz von Y sind gegeben durch $\mathbf{E}[Y] = 50 \cdot n \cdot p = 72,\ \mathbf{V}[Y] = 50 \cdot n \cdot p \cdot (1 - p) = 69.84$. Mit der Ungleichung von Chebyshev erhalten wir

$$P(|Y - \mathbf{E}[Y]| \leq 12) > 1 - \frac{\mathbf{V}[Y]}{12^2} = 0.515.$$

Hausaufgabe 48
Ein Unternehmen produziert ein Produkt, bei dem sich die Herstellungskosten pro Stück auf 800 € belaufen. Pro Stück ist jeweils genau ein Bauteil B_1 und ein Bauteil B_2 verbaut. Während der Garantiezeit fällt das Bauteil B_1 mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1 = 0.2$ und das Bauteil B_2, davon unabhängig, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_2 = 0.01$ aus. Die Reparaturkosten von Bauteil B_1 bzw. B_2 betragen 30 € bzw. 400 €.

1. Wie hoch sind die erwarteten Reparaturkosten X des Produkts innerhalb der Garantiezeit? Bestimmen Sie auch die Varianz.

2. Zu welchem Preis muss das Produkt verkauft werden, um einen Reingewinn von mindestens 150 € zu erwarten?

3. Benutzen Sie die Chebyshev-Ungleichung, um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, mit der bei einem Verkauf von 500 Geräten die Gesamtreparaturkosten Y mehr als 1000 € vom erwarteten Wert abweichen.

4. Wieviele Produkte müssen mindestens verkauft werden, wenn die anfallenden, durchschnittlichen Gesamtreparaturkosten Z mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % um weniger als 10 € vom Erwartungswert abweichen sollen?

Lösung zu Hausaufgabe 48
Achtung: In einer älteren Version dieser Aufgabe war $p_2 = 0.1$.

Teilaufgabe 1: Es bezeichne X die Reparaturkosten des Produkts. Dann nimmt X die Werte in folgender Menge an: $\{0, 30, 400, 430\}$. Deshalb erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 30 \cdot p_1 \cdot (1-p_2) + 400 \cdot (1-p_1) \cdot p_2 + 430 \cdot p_1 p_2 = 10,\\ \mathbf{V}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2\\ &= 30^2 \cdot p_1 \cdot (1-p_2) + 400^2 \cdot (1-p_1) \cdot p_2 + 430^2 \cdot p_1 p_2 - 100 = 1728.\end{aligned}$$

Teilaufgabe 2: Die Herstellungskosten liegen bei 800 €, die erwarteten Reparaturkosten belaufen sich nach Teil 1 auf 10 €. Um einen Reingewinn von mindestens 150 € zu erzielen muss das Produkt folglich zu einem Preis von mindestens 960 € verkauft werden.

Teilaufgabe 3: Für $i = 1, ..., 500$ bezeichne X_i die Reparaturkosten von Gerät i. Die Zufallsvariablen X_i sind unabhängig und somit ergibt sich für die Gesamtreparaturkosten $Y = X_1 + ... + X_{500}$:

$$P(|Y - \mathbf{E}[Y]| > 1000) < \frac{\mathbf{V}[Y]}{1000^2} = \frac{500 \cdot \mathbf{V}[X]}{1000^2} = 0.864.$$

Teilaufgabe 4: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $i = 1, ..., n$ bezeichne X_i die Reparaturkosten von Gerät i und $Z_n := \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ die durchschnittlichen Gesamtreparaturkosten. Die Varianz der Zufallsvariablen Z_n ist gegeben durch

$$\mathbf{V}[Z_n] = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}[X_1 + ... + X_n] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \mathbf{V}[X] = \frac{1728}{n}.$$

Mit der Ungleichung von Chebyshev erhalten wir

$$P(|Z_n - \mathbf{E}[Z_n]| < 10) \geq 1 - \frac{\mathbf{V}[Z_n]}{10^2} = 1 - \frac{1728}{100n}.$$

Wir suchen deshalb die kleinste natürliche Zahl n für die gilt:

$$1 - \frac{1728}{100n} \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{1728}{5} = 345.6.$$

Es müssen also mindestens 346 Geräte verkauft werden.