

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 16

Sommersemester 2017

Die Abgabe zu Blatt 16 erfolgt in der Woche vom **22.5. bis 26.5.2017**.

Fragen und Hinweise bitte an bergold@ma.tum.de.

Übungen (Varianz, Ungleichung von Chebyshev, Kovarianz)

Aufgabe 1

Es sei $n, N \in \mathbb{N}^*$, $n \leq N$ und P die Gleichverteilung auf $\Omega_4(N, n)$. Für $\omega \in \Omega_4(N, n)$ bezeichne $X(\omega)$ die Anzahl der Einträge von ω aus $\{1, 2, \dots, r\}$, wobei $r \in \mathbb{N}$, $r \leq N$.

1. Wie ist die Zufallsvariable X verteilt? Geben Sie für $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ an.
2. Wie lässt sich X als Summe von Indikatorfunktionen schreiben?
3. Benutzen Sie die Darstellung von X aus Teilaufgabe 2 und berechnen Sie $\mathbf{E}[X]$ mit Hilfe der Additivität des Erwartungswertes.

Aufgabe 2

Sie drehen ein Glücksrad mit fünf Flächen dreimal hintereinander. Die Flächen des Glücksrads sind von 1 bis 5 beschriftet und die Eintrittswahrscheinlichkeit für jede dieser Flächen sei $1/5$. Für $i = 1, 2, 3$ sei X_i das Ergebnis der i -ten Drehung. Des Weiteren definieren wir die Zufallsvariablen S und D wie folgt:

$$S := 5X_1 + 4X_2 + 3X_3, \quad D := 5X_1 - 4X_2 - 3X_3.$$

1. Bestimmen Sie $\mathbf{E}[X_i]$ sowie $\mathbf{V}[X_i]$ für $i = 1, 2, 3$.
2. Bestimmen Sie $\mathbf{E}[X_1 \cdot X_2]$ sowie $\mathbf{E}[X_1 \cdot X_2 \cdot X_3]$.
3. Bestimmen Sie $\mathbf{Cov}[S, D]$.

Aufgabe 3

Es sei $a > 0$ und X eine diskrete Zufallsvariable mit

$$P(X = -a) = P(X = a) = p/2, \quad P(X = 0) = 1 - p, \quad p \in (0, 1).$$

Zeigen Sie, dass die Ungleichung von Chebyshev für die Zufallsvariable X scharf ist in dem Sinne, dass die Abschätzung mit Gleichheit gilt.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 46

Es seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen (nicht notwendigerweise unabhängig), sodass X_k Bernoulli-verteilt ist mit Parameter $p_k \in (0, 1)$ für $1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie:

$$\mathbf{V} \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] \leq \left(\sum_{k=1}^n p_k \right) \left(\sum_{k=1}^n 1 - p_k \right)$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\mathbf{E}[X_i X_j] \leq \mathbf{E}[X_i]$ für $1 \leq i \neq j \leq n$.

Hausaufgabe 47

Nach dem schriftlichen Abitur trifft sich der Mathematik-Leistungskurs in der Eisdieler „La dolce vita“. Der Pächter Roberto ist gerade ungehalten, weil er in einem Karton 4 zerbrochene Eiswaffeln entdeckt hat. Roberto bekommt seine Eiswaffeln in Kartons zu je 48 Stück. Er berichtet, dass er schon von der letzten Lieferung aus 50 Kartons insgesamt 72 Waffeln wegwerfen musste, weil sie zerbrochen waren. Die Kollegiaten geraten ins Fachsimpeln. Im Folgenden wird angenommen, dass im Mittel der Anteil an zerbrochenen Waffeln genau dem aus der letzten Lieferung von 2400 Waffeln entspricht und dass die zerbrochenen Waffeln zufällig verteilt sind.

1. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Karton genau 4 Waffeln zerbrochen sind?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der zerbrochenen Waffeln in einer Lieferung von 50 Kartons um höchstens 12 vom Erwartungswert abweicht? Schätzen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der Ungleichung von Chebyshev ab.

Hausaufgabe 48

Ein Unternehmen produziert ein Produkt, bei dem sich die Herstellungskosten pro Stück auf 800 € belaufen. Pro Stück ist jeweils genau ein Bauteil B_1 und ein Bauteil B_2 verbaut. Während der Garantiezeit fällt das Bauteil B_1 mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1 = 0.2$ und das Bauteil B_2 , davon unabhängig, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_2 = 0.01$ aus. Die Reparaturkosten von Bauteil B_1 bzw. B_2 betragen 30 € bzw. 400 €.

1. Wie hoch sind die erwarteten Reparaturkosten X des Produkts innerhalb der Garantiezeit? Bestimmen Sie auch die Varianz.
2. Zu welchem Preis muss das Produkt verkauft werden, um einen Reingewinn von mindestens 150 € zu erwarten?
3. Benutzen Sie die Chebyshev-Ungleichung, um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, mit der bei einem Verkauf von 500 Geräten die Gesamt-Reparaturkosten Y mehr als 1000 € vom erwarteten Wert abweichen.
4. Wieviele Produkte müssen mindestens verkauft werden, wenn die anfallenden, durchschnittlichen Gesamt-Reparaturkosten Z mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % um weniger als 10 € vom Erwartungswert abweichen sollen?