Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 15

Sommersemester 2017

Lösungshinweise

Hausaufgabe 43
Ein Sammler besitzt fünf Paare blaue Handschuhe und drei Paare rote Handschuhe. Alle Handschuhe sind unterscheidbar und linke und rechte Handschuhe können nicht vertauscht werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Handschuhe in acht zulässige Paare (gleichfarbig und links-rechts) zu kombinieren?

Lösung zu Hausaufgabe 43
Wir betrachten zuerst die blauen Handschuhe. Es gibt 5! Möglichkeiten die rechten Handschuhe in einer Reihe anzuordnen. Genauso gibt es 5! Möglichkeiten die linken Handschuhe in einer Reihe anzuordnen. Auf diese Weise können $(5!)^2$ Paare (geordnet) gebildet werden. Da die Reihenfolge der Handschuhe allerdings keine Rolle spielt, teilen wir noch durch 5!. Schließlich erhalten wir $5! = 120$ Möglichkeiten die blauen Handschuhe zu kombinieren. Analog gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten die roten Handschuhe zu kombinieren. Das ergibt insgesamt $5! \cdot 3! = 720$ mögliche Kombinationen.

Hausaufgabe 44
Es sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $\mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass dann die folgende Gleichung gilt:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n). \tag{1}$$

Hinweis: Zeigen Sie im ersten Schritt, dass $\mathbf{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} P(X = k)$ gilt.

Lösung zu Hausaufgabe 44
Nach Definition des Erwartungswerts erhalten wir

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} 1 \right) P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} P(X = k).$$

Die Doppelsumme enthält ausschließlich nichtnegative Summanden und ist definiert über den Bereich $\{(n, k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq k\}$. Konvergiert diese Reihe, dann dürfen wir die Summations-Reihenfolge wie folgt ändern:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} P(X = k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(X = k).$$

Die Aussage folgt somit aus

$$\sum_{k=n}^{\infty} P(X = k) = P(X \geq n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Falls $\mathbf{E}[X] = \infty$, so ist auch die umgeordnete Reihe divergent und beide Seiten von Gleichung (1) entsprechen ∞.

Hausaufgabe 45
Betrachten Sie folgendes Spiel: Zu Beginn legen Sie einen Euro in Ihr zuvor entleertes Portemonnaie. Im Anschluss werfen Sie eine faire Münze. Immer dann, wenn bei einem Münzwurf Kopf erscheint, verdoppeln Sie den Inhalt Ihres Portemonnaies. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und berechnen Sie den erwarteten Inhalt des Portemonnaies nach n Würfen.

Lösung zu Hausaufgabe 45
Es sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Würfe. Als Grundraum des Experiments wählen wir $\{0, 1\}^n$ mit der Potenzmenge als σ-Algebra und der Gleichverteilung als Wahrscheinlichkeitsmaß. Dies entspricht gerade einem n-stufigen Bernoulli-Experiment. Sei X die Anzahl der Münzwürfe bei denen Kopf erscheint. Dann erhalten wir $X \sim \text{Bin}(n, 1/2)$. Insbesondere ist der Inhalt des Portemonnaies nach n Würfen gegeben durch 2^X. Unter Verwendung der Transformationsformel aus der Vorlesung erhalten wir mit $g\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N},\ g(n) = 2^n$ folgenden Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[2^X\right] = \mathbf{E}\left[g(x)\right] &= \sum_{k=0}^{n} g(k) \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n .
\end{aligned}$$

Der erwartete Inhalt des Portemonnaies beträgt demnach $(3/2)^n$.