

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 15

Sommersemester 2017

Die Abgabe zu Blatt 15 erfolgt in der Woche vom **15.5. bis 19.5.2017**.

Fragen und Hinweise bitte an bergold@ma.tum.de.

Übungen (Kombinatorik, Erwartungswerte)

Aufgabe 1

Sie sitzen mit vier Damen und sechs Herren in einem Biergarten. Plötzlich verkündet der Wirt: „Liebe Gäste, drei von Ihnen erhalten heute Ihre Getränke gratis!“

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den anwesenden Gästen drei Personen, ohne Beachtung der Reihenfolge, auszuwählen?
2. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie unter den ausgewählten Personen sind?
3. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie zusammen mit zwei Damen unter den ausgewählten Personen sind?
4. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den anwesenden Gästen eine Warteschlange bestehend aus drei Personen zu bilden?

Aufgabe 2

Es sein $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Anordnungen von $[2n]$ gibt es, sodass keine zwei ungeraden Zahlen nebeneinander sind? Des Weiteren sei $0 \leq k \leq n$. Ordnen Sie die folgenden Zahlen in aufsteigender Reihenfolge an:

$$n^k, \binom{n}{k}, n^{\underline{k}}$$

Aufgabe 3

Es sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Zufallsvariable mit $\mathbf{E}[X] \neq 0$. Begründen Sie, dass folgende Gleichung im Allgemeinen nicht erfüllt ist:

$$\mathbf{E} \left[\frac{1}{X} \right] = \frac{1}{\mathbf{E}[X]}. \quad (1)$$

Gegeben sei nun $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, sowie eine gleichverteilte Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $X(\omega_k) = x_k$ für $k = 1, 2$. Geben Sie ein Beispiel an, sodass Gleichung (1) gilt. Was muss unter den Voraussetzungen von oben gelten, dass (1) nicht gilt?

Hausaufgaben

Hausaufgabe 43

Ein Sammler besitzt fünf Paare blaue Handschuhe und drei Paare rote Handschuhe. Alle Handschuhe sind unterscheidbar und linke und rechte Handschuhe können nicht vertauscht werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Handschuhe in acht zulässige Paare (gleichfarbig und links-rechts) zu kombinieren?

Hausaufgabe 44

Es sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit Werten in \mathbb{N}^* . Zeigen Sie, dass dann die folgende Gleichung gilt:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

Hinweis: Zeigen Sie im ersten Schritt, dass $\mathbf{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k P(X = k)$ gilt.

Hausaufgabe 45

Betrachten Sie folgendes Spiel: Zu Beginn legen Sie einen Euro in Ihr zuvor entleertes Portemonnaie. Im Anschluss werfen Sie eine faire Münze. Immer dann, wenn bei einem Münzwurf Kopf erscheint, verdoppeln Sie den Inhalt Ihres Portemonnaies. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und berechnen Sie den erwarteten Inhalt des Portemonnaies nach n Würfeln.