Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 14

Sommersemester 2017

Lösungshinweise

Hausaufgabe 40
In einer Multiple-Choice-Klausur werden zehn Aufgaben mit je fünf Wahlmöglichkeiten gestellt, von denen je genau eine Antwort richtig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lassen sich mindestens sechs Antworten richtig erraten? Welche Annahmen haben Sie hierbei verwendet?

Lösung zu Hausaufgabe 40
Wir nehmen an, dass für jede Aufgabe die fünf Antwortmöglichkeiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt werden. Somit ergibt sich für die oben beschriebene Situation eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 10$ und $p = 1/5$. Sei X die Anzahl der richtig geratenen Antworten. Dann gilt also $X \sim \mathrm{Bin}(10, 1/5)$ und die Wahrscheinlichkeit mindestens sechs Antworten richtig zu erraten ist gegeben durch

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{10-k} \approx 0.64\%.$$

Hausaufgabe 41
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit mit drei Laplace-Würfeln folgende Ereignisse zu werfen:

1. Drei gleiche Augenzahlen
2. Zwei gleiche und eine verschiedene Augenzahl
3. Drei verschiedene Augenzahlen
4. Mindestens eine Sechs

Geben Sie darüber hinaus ein Ereignis $A \subset \Omega$ mit $P(A) = 1/12$ an.

Lösung zu Hausaufgabe 41
Es sei $\Omega = [6]^3$ und P die Gleichverteilung auf Ω. Des Weiteren bezeichne $E_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ die Ereignisse von oben.

Zu Ereignis E_1:
Für den Ergebnisraum Ω erhalten wir

$$\Omega = \left\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{N}^3 |\ \omega_k \in\ [6],\ k = 1, 2, 3\right\}, \quad |\Omega| = 6^3 = 216.$$

Unter der Annahme $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ können wir ohne Einschränkung den Wert von $\omega_1 \in [6]$ frei wählen. Der Wert von ω_2 und ω_3 ist dann ebenfalls festgelegt. Somit erhalten wir

$$|E_1| = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6 \quad \Rightarrow \quad P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} \approx 2.8\%.$$

Zu Ereignis E_2:
Es gibt drei Möglichkeiten ($k = 1, 2, 3$) die Position der einen verschiedenen Augenzahl zu wählen. Insbesondere sind somit die Positionen der gleichen Augenzahlen eindeutig festgelegt. Sei ohne Einschränkung $\omega_1 \in [6]$ die verschiedene Augenzahl. Unter der Annahme $\omega_1 \neq \omega_2 = \omega_3$ bleiben für die Wahl von ω_2 dann noch 5 Möglichkeiten. Der Wert von ω_3 ist dann ebenfalls festgelegt. Somit erhalten wir

$$|E_2| = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90 \quad \Rightarrow \quad P(E_2) = \frac{|E_2|}{|\Omega|} = \frac{90}{216} = \frac{5}{12} \approx 41.7\%.$$

Zu Ereignis E_3:
Für die Wahl von ω_1 gibt es 6 Möglichkeiten. Da $\omega_2 \neq \omega_1$ bleiben für die Wahl von ω_2 noch 5 Möglichkeiten. Entsprechend bleiben für ω_3 noch 4 Möglichkeiten. Somit erhalten wir

$$|E_3| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \quad \Rightarrow \quad P(E_3) = \frac{|E_3|}{|\Omega|} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9} \approx 55.6\%.$$

Zu Ereignis E_4:
Das Gegenereignis lautet: „Keine Sechs“. Somit gilt $E_4^c = [5]^3$ und es folgt $|E_4^c| = 5^3$. Für die Wahrscheinlichkeit von E_4 erhalten wir deshalb

$$P(E_4) = 1 - P(E_4^c) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216} \approx 42.1\%.$$

Das Ereignis A muss so gewählt werden, dass $|A| = |\Omega| \cdot P(A) = 18$. Eine zulässige Wahl für A ist demnach beispielsweise

$$A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{N}^3 |\ \omega_1 = 1,\ \omega_2 \in \{2, 3, 5\},\ \omega_3 \in [6]\} \subset \Omega,$$

beziehungsweise: „Der erste Wurf zeigt die 1, der zweite Wurf zeigt eine Primzahl “.

Hausaufgabe 42
In einer Gemeinschaftspraxis von Augenärzten ergab eine mehrjährige Auswertung der Patientenkartei, dass im Durchschnitt jeder 15. Patient an Grauem Star leidet.

a) Im Laufe eines Vormittags rufen unabhängig voneinander 15 Personen an und bitten um einen Termin. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat genau eine dieser Personen Grauen Star?

b) Wie viele Personen müssen unabhängig voneinander um einen Termin bitten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens einer darunter ist, der an Grauem Star leidet?

Lösung zu Hausaufgabe 42
Teilaufgabe a)
Es sei X die Anzahl der Anrufer mit Grauem Star. Dann gilt $X \sim \mathrm{Bin}(n = 15, p = 1/15)$ und die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine dieser Personen unter Grauem Star leidet berechnet sich zu

$$P(X = 1) = \binom{15}{1} \left(\frac{1}{15}\right)^1 \left(\frac{14}{15}\right)^{14} = \left(\frac{14}{15}\right)^{14} \approx 38.1\%.$$

Teilaufgabe b)
Für $m \in \mathbb{N}$ sei $Y_m \sim \mathrm{Bin}(m, 1/15)$, wobei wie zuvor Y_m die Anzahl der Personen, unter den m Anrufern, mit Grauem Star sei. Wir müssen also m so wählen, dass

$$P(Y_m \geq 1) > 90\%.$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}
& P(Y_m \geq 1) > 90\% \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - P(Y_m = 0) > 0.9 \\
\Leftrightarrow \quad & 0.1 > P(Y_m = 0) \\
\Leftrightarrow \quad & 0.1 > \left(\frac{14}{15}\right)^m \\
\Leftrightarrow \quad & \ln(0.1) > m \ln(14/15) \quad \mid : \ln(14/15) < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 33.4 \approx \frac{\ln(0.1)}{\ln(14/15)} < m.
\end{aligned}$$

Somit können wir $m = 34$ wählen. Es müssen also 34 Personen um einen Termin bitten.