Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 13

Wintersemester 2016/17

Lösungshinweise

Hausaufgabe 37

Ein Flugzeug mit drei Motoren stürzt ab, wenn der Hauptmotor in der Mitte oder beide Seitenmotoren ausfallen. Hingegen stürzt ein Flugzeug mit vier Motoren ab, wenn auf einer Seite beide Motoren ausfallen. Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Flugzeugmotors auf einem bestimmten Flug sei $p \in (0, 1)$. Ferner werde Unabhängigkeit für das Eintreten der Defekte an den einzelnen Motoren angenommen. Sei $A_i, i = 3, 4$ das Ereignis „Absturz des Flugzeugs mit i Motoren durch Motorversagen."

1. Bestimmen Sie $P(A_3)$ und $P(A_4)$.
2. Skizzieren Sie $P(A_3)$ und $P(A_4)$ als Funktion von p.

Lösung zu Hausaufgabe 37

Teilaufgabe 1:

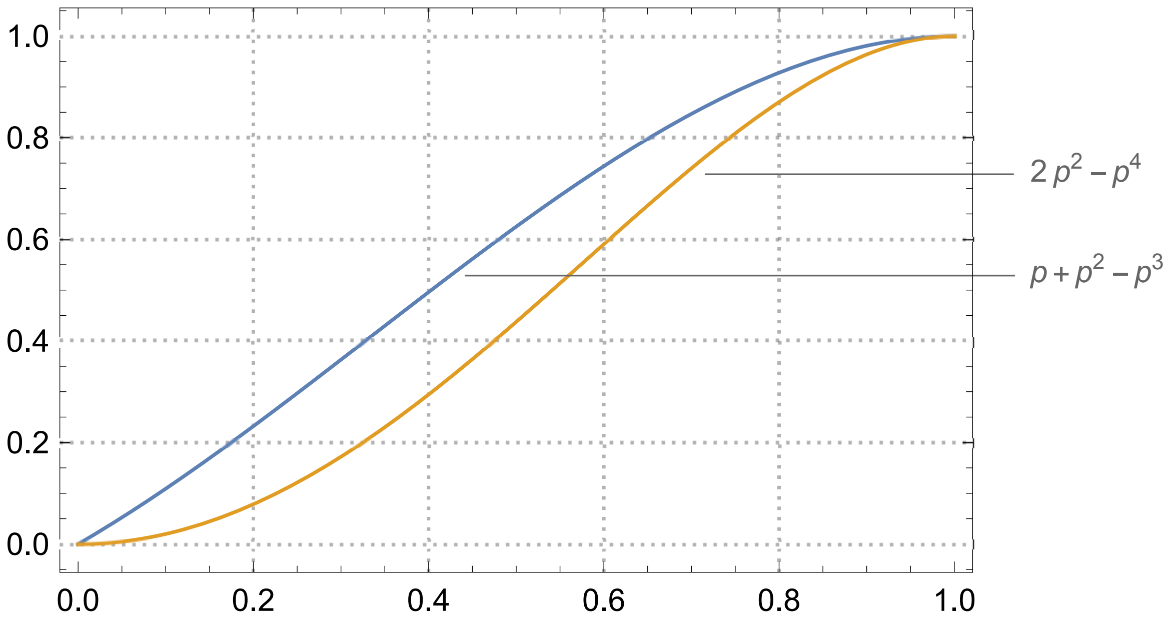
Wir betrachten ein Flugzeug mit den drei Motoren 1, 2 und 3, wobei 2 den Hauptmotor in der Mitte bezeichne. Sei außerdem $M_i,\ i = 1, 2, 3$ das Ereignis „Motor i fällt aus." Dann folgt mit der Unabhängigkeit der Defekte:

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(M_2 \cup (M_1 \cap M_3)) \\ &= P(M_2) + P(M_1 \cap M_3) - P(M_2 \cap M_1 \cap M_3) \\ &= p + p^2 - p^3 \end{aligned}$$

Analog folgt für ein Flugzeug mit vier Motoren:

$$\begin{aligned} P(A_4) &= P((M_1 \cap M_2) \cup (M_3 \cap M_4)) \\ &= P(M_1 \cap M_2) + P(M_3 \cap M_4) - P(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4) \\ &= p^2 + p^2 - p^4 = 2p^2 - p^4. \end{aligned}$$

Teilaufgabe 2:



Hausaufgabe 38 (Ein Simpson-Paradoxon)
Jeweils 1000 Frauen und 1000 Männer bewerben sich entweder für Fach 1 oder Fach 2. Nach eingehender Prüfung wird nur ein Teil der Bewerber/innen zugelassen.

	Frauen			**Männer**		
Fach	Bewerberinnen	zugelassen	in %	Bewerber	zugelassen	in %
1	900	720		200	180	
2	100	20		800	240	
Summe						

1. Vervollständigen Sie die oben gezeigte Tabelle.

2. Wir definieren folgende Ereignisse: Z: „Zulassung“, F_1: „Bewerbung für Fach 1“, F_2: „Bewerbung für Fach 2“, M: „Der Bewerber ist männlich“. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse jeweils für Männer und Frauen an:
   - „Ein Bewerber wird in Fach 1 zugelassen.“
   - „Ein Bewerber wird in Fach 2 zugelassen.“
   - „Ein Bewerber wird zugelassen.“

3. Da für Fach 1 90% der Männer, jedoch nur 80% der Frauen und für Fach 2 30% der Männer, jedoch nur 20% der Frauen zugelassen werden, besteht der Verdacht dass Männer bevorzugt werden. Wie erklären Sie sich, dass insgesamt aber 74% der Frauen und lediglich 42% der Männer zugelassen werden? Leiten Sie hierzu folgende Formel her und interpretieren Sie diese:

$$P_M(Z) = P(Z|M \cap F_1) \cdot P(F_1|M) + P(Z|M \cap F_2) \cdot P(F_2|M)$$

Lösung zu Hausaufgabe 38
Teilaufgabe 1:

	Frauen			Männer		
Fach	Bewerberinnen	zugelassen	in %	Bewerber	zugelassen	in %
1	900	720	80	200	180	90
2	100	20	20	800	240	30
Summe	1000	740	74	1000	420	42

Teilaufgabe 2:
Für Männer und Frauen lesen wir jeweils an der Tabelle ab:

$$\begin{aligned} &P(Z|M \cap F_1) = 90\%, && P(Z|M \cap F_2) = 30\%, && P(Z|M) = 42\%, \\ &P(Z|M^c \cap F_1) = 80\%, && P(Z|M^c \cap F_2) = 20\%, && P(Z|M^c) = 74\%. \end{aligned}$$

Teilaufgabe 3:
Es ist $P(M \cap F_1), P(M \cap F_2) > 0$ und somit erhalten wir

$$\begin{aligned} P(Z|M) &= \frac{P(Z \cap M)}{P(M)} \\ &= \frac{P(Z \cap M \cap F_1) + P(Z \cap M \cap F_2)}{P(M)} \\ &= \frac{P(Z \cap M \cap F_1)}{P(M \cap F_1)} \cdot \frac{P(M \cap F_1)}{P(M)} + \frac{P(Z \cap M \cap F_2)}{P(M \cap F_2)} \cdot \frac{P(M \cap F_2)}{P(M)} \\ &= P(Z|M \cap F_1) \cdot P(F_1|M) + P(Z|M \cap F_2) \cdot P(F_2|M). \end{aligned}$$

Das Phänomen tritt auf, da für $j = 1, 2$ die Wahrscheinlichkeit $P(F_j|M)$ gerade dann groß (klein) ist, wenn $P(Z|M \cap F_j)$ klein (groß) ist. Hingegen ist $P(F_j|M^c)$ groß (klein), wenn auch $P(Z|M \cap F_j)$ groß (klein) ist.

Bemerkung: Die Besonderheit, dass $P(Z|M^c \cap F_j) < P(Z|M \cap F_j)$ für $j = 1, 2$ aber „paradoxerweise“ $P(Z|M^c) > P(Z|M)$, heißt Simpson-Paradoxon.

Hausaufgabe 39
Das Wachstum einer Bakterienkultur kann als mehrstufiges Experiment modelliert werden. In jedem Generationswechsel gibt es folgende Entwicklungsmöglichkeiten. Entweder ein Bakterium stirbt, oder es teilt sich, wodurch zwei neue Bakterien entstehen. Dieses Verhalten ist für jedes Bakterium unabhängig vom Rest der Kultur und tritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit p beziehungsweise $1 - p$ ein. Angenommen die erste Generation besteht aus einem Bakterium. Wie muss p gewählt werden, dass die Kultur mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% nicht nach endlich vielen Generationen ausstirbt?
(Hinweis: Betrachten Sie die Lösungen der Gleichung $x = (1 - p) + px^2$.)

Lösung zu Hausaufgabe 39
Bemerkung: In einer früheren Version der Aufgabe war p und $1-p$ vertauscht.

Sei E das Ereignis, dass die Kultur nach endlich vielen Generationen ausstirbt. Außerdem sei S_1 die Wahrscheinlichkeit, dass das Bakterium der 1. Generation stirbt. Offensichtlich gilt $P(E|S_1) = 1$. Tritt S_1 nicht ein, so besteht die zweite Generation aus zwei Bakterien. Da sich die Bakterien unabhängig voneinander entwickeln, können wir beide Bakterien als erste Generation einer jeweils neuen Kultur betrachten. Beide Kulturen verhalten sich identisch zur ursprünglichen Kultur. Insbesondere stirbt die ursprüngliche Kultur in endlich vielen Generationen aus, wenn beide der neuen Kulturen in endlich vielen Generationen aussterben. Aufgrund der Unabhängigkeit geschieht dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(E|S_1^c) = P(E)^2$. Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$P(E) = P(E|S_1)P(S_1) + P(E|S_1^c)P(S_1^c) = 1 \cdot (1-p) + P(E)^2 \cdot p.$$

Für $x := P(E)$ erhalten wir also genau die Gleichung aus dem Hinweis. Wir möchten nun p so wählen, dass E mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/10$ eintritt. Demnach erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} &= (1-p) + p\left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad p &= \frac{10}{11}. \end{aligned}$$