Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 13

Wintersemester 2016/17

Die Abgabe zu Blatt 13 erfolgt in der Woche vom **6.2. bis 10.2.2017.**
Fragen und Hinweise bitte an bergold@ma.tum.de.

Übungen (Mehrstufige Experimente)

Aufgabe 1
Ein Schüler erscheint an vier von fünf Tagen unausgeschlafen in der Schule, an einem Tag hat er ausgeschlafen. Wenn er ausgeschlafen ist, erledigt er die Aufgaben in der Mathematikstunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 fehlerfrei, wenn er unausgeschlafen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.4. In der Probe am Donnerstag erhält er volle Punktzahl.

1. Erstellen Sie ein Baumdiagramm.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Schüler an diesem Donnerstag unausgeschlafen zum Unterricht erschienen? Definieren Sie für Ihre Berechnung geeignete Ereignisse.

Aufgabe 2 (Das Ziegenproblem)
In einer Spielshow stehen Ihnen drei Tore zur Auswahl. Hinter einem dieser Tore befindet sich ein Auto (Gewinn) hinter den anderen jeweils eine Ziege (Niete). Das Spiel wird begleitet von einem Moderator, der weiß, hinter welchem der Tore das Auto platziert wurde. Sie entscheiden sich nun für eines der drei Tore, welches im weiteren Spielverlauf geschlossen bleibt. Im Anschluss öffnet der Moderator eines der beiden anderen Tore, hinter dem sich eine Ziege befindet. Sie haben nun noch einmal die Möglichkeit Ihre getroffene Wahl zu überdenken und sich für das verbliebene Tor zu entscheiden.
Modellieren Sie das Spiel als 3-stufiges Experiment mit Übergangswahrscheinlichkeiten. Die erste Stufe bestehe aus Ihrer anfänglichen Torwahl, die zweite Stufe aus der Wahl des Moderators und die dritte Stufe aus Ihrer endgültigen Wahl. Unterscheiden Sie dabei folgende Fälle:

1. Sie halten an Ihrer anfänglichen Wahl fest.
2. Sie wechseln das Tor, d.h. Sie entscheiden sich für das verbliebene Tor.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 37
Ein Flugzeug mit drei Motoren stürzt ab, wenn der Hauptmotor in der Mitte oder beide Seitenmotoren ausfallen. Hingegen stürzt ein Flugzeug mit vier Motoren ab, wenn auf

einer Seite beide Motoren ausfallen. Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Flugzeugmotors auf einem bestimmten Flug sei $p \in (0,1)$. Ferner werde Unabhängigkeit für das Eintreten der Defekte an den einzelnen Motoren angenommen. Sei $A_i, i = 3,4$ das Ereignis „Absturz des Flugzeugs mit i Motoren durch Motorversagen.“

1. Bestimmen Sie $P(A_3)$ und $P(A_4)$.

2. Skizzieren Sie $P(A_3)$ und $P(A_4)$ als Funktion von p.

Hausaufgabe 38 (Ein Simpson-Paradoxon)
Jeweils 1000 Frauen und 1000 Männer bewerben sich entweder für Fach 1 oder Fach 2. Nach eingehender Prüfung wird nur ein Teil der Bewerber/innen zugelassen.

	Frauen			**Männer**		
Fach	Bewerberinnen	zugelassen	in %	Bewerber	zugelassen	in %
1	1900	720		200	180	
2	100	20		800	240	
Summe						

1. Vervollständigen Sie die oben gezeigte Tabelle.

2. Wir definieren folgende Ereignisse: Z: „Zulassung“, F_1: „Bewerbung für Fach 1“, F_2: „Bewerbung für Fach 2“, M: „Der Bewerber ist männlich“. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse jeweils für Männer und Frauen an:
   - „Ein Bewerber wird in Fach 1 zugelassen.“
   - „Ein Bewerber wird in Fach 2 zugelassen.“
   - „Ein Bewerber wird zugelassen.“

3. Da für Fach 1 90% der Männer, jedoch nur 80% der Frauen und für Fach 2 30% der Männer, jedoch nur 20% der Frauen zugelassen werden, besteht der Verdacht dass Männer bevorzugt werden. Wie erklären Sie sich, dass insgesamt aber 74% der Frauen und lediglich 42% der Männer zugelassen werden? Leiten Sie hierzu folgende Formel her und interpretieren Sie diese:

$$P_M(Z) = P(Z|M \cap F_1) \cdot P(F_1|M) + P(Z|M \cap F_2) \cdot P(F_2|M)$$

Hausaufgabe 39
Das Wachstum einer Bakterienkultur kann als mehrstufiges Experiment modelliert werden. In jedem Generationswechsel gibt es folgende Entwicklungsmöglichkeiten. Entweder ein Bakterium stirbt, oder es teilt sich, wodurch zwei neue Bakterien entstehen. Dieses Verhalten ist für jedes Bakterium unabhängig vom Rest der Kultur und tritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit p beziehungsweise $1-p$ ein. Angenommen die erste Generation besteht aus einem Bakterium. Wie muss p gewählt werden, dass die Kultur mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% nicht nach endlich vielen Generationen ausstirbt?
(Hinweis: Betrachten Sie die Lösungen der Gleichung $x = (1-p) + px^2$.)