Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 12

Wintersemester 2016/17

Lösungshinweise

Hausaufgabe 34
Ein Affe generiert durch zufälliges Tippen einer Tastatur, welche aus den Ziffern 0 und 1 besteht, zufällig eine Zahlenfolge mit $n \geq 2$ Ziffern. Betrachten Sie die folgenden Ereignisse:

1. Die erzeugte Zahlenfolge enthält beide Ziffern. (E_1)
2. Die erzeugte Zahlenfolge enthält die Ziffer 1 höchstens einmal. (E_2)

Für welche Werte von n sind die Ereignisse E_1 und E_2 unabhängig?

Lösung zu Hausaufgabe 34
Es sei $\Omega = \{0,1\}^n$ und P die Gleichverteilung auf Ω. Außerdem sei

$$\begin{aligned}
A &:= \{(0, ..., 0) \in \Omega\},\\
B &:= \{(1, ..., 1) \in \Omega\},\\
C &:= \{(\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega |\ \exists i \in [n]:\ \omega_i = 1 \text{ und } \omega_j = 0 \text{ für } j \neq i\}.
\end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
E_1^c = A \dot\cup B &\Rightarrow |E_1| = |\Omega| - |E_1^c| = |\Omega| - |A| - |B| = 2^n - 2,\\
E_2 = A \dot\cup C &\Rightarrow |E_2| = |A| + |C| = 1 + n,\\
E_1 \cap E_2 = C &\Rightarrow |E_1 \cap E_2| = |C| = n.
\end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit der Ereignisse E_1 und E_2 ist somit äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)\\
\Leftrightarrow \quad & n2^n = (2^n - 2)(1 + n) = 2^n + n2^n - 2 - 2n\\
\Leftrightarrow \quad & 0 = 2^n - 2n - 2.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besitzt in den natürlichen Zahlen nur die Lösung $n = 3$. Somit sind die Ereignisse E_1 und E_2 nur für $n = 3$ unabhängig.

Hausaufgabe 35
Sei Ω eine abzählbare Ergebnismenge, P ein Wahrscheinlichkeitsmaß und X, Y Zufallsvariablen auf Ω. Geben Sie Voraussetzungen an Ω und P an, sodass gilt:

$$X = Y \quad \Rightarrow \quad X \text{ und } Y \text{ sind abhängig.}$$

Lösung zu Hausaufgabe 35
Sei $c \in \mathbb{R}$ sowie $\forall \omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega) = c$. Dann gilt $P(X = x) \in \{0, 1\}$ und es folgt

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Das heißt die Zufallsvariablen sind unabhängig. Wir nehmen deshalb an, dass $X = Y$ nicht konstant ist auf Ω. Genauer soll gelten:

$$\exists \omega_1, \omega_2 \in \Omega,\ p(\omega_1), p(\omega_2) \in (0, 1) : X(\omega_1) \neq X(\omega_2).$$

Insbesondere ist also $|\Omega| \geq 2$. Angenommen X und Y sind unabhängig. Dann folgt

$$\begin{aligned} &P(X = x, Y = x) = P(X = x)P(Y = x) \\ \Leftrightarrow \quad &P(X = x) = P(X = x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad &P(X = x) \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Allerdings gilt $P(X = X(\omega_1)) \in [p(\omega_1), 1 - p(\omega_2)]$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Unabhängigkeit von X und Y. Somit sind die Zufallsvariablen abhängig.

Hausaufgabe 36
Betrachten Sie folgende Ereignisse beim zweimaligen Werfen einer fairen Münze:

1. Im ersten Wurf erscheint Kopf.
2. Im zweiten Wurf erscheint Kopf.
3. Die Anzahl der Würfe bei denen Kopf erscheint ist gerade.

Zeigen Sie, dass diese Ereignisse paarweise unabhängig, jedoch nicht unabhängig sind.

Lösung zu Hausaufgabe 36
Es sei $\Omega = \{K, Z\}^2$ und P die Gleichverteilung auf Ω. Außerdem sei

$E_1 := \{(K, K), (K, Z)\}$ (Im ersten Wurf erscheint Kopf.)
$E_2 := \{(K, K), (Z, K)\}$ (Im zweiten Wurf erscheint Kopf.)
$E_3 := \{(K, K), (Z, Z)\}$ (Die Anzahl der Würfe bei denen Kopf erscheint ist gerade.)

Dann folgt

$$P(E_i \cap E_j) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(E_i) \cdot P(E_j), \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j.$$

Somit sind E_1, E_2 und E_3 paarweise unabhängig. Allerdings sind die Ereignisse nicht unabhängig, da

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3).$$