Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 11

Wintersemester 2016/17

Lösungshinweise

Hausaufgabe 31

Vier Hersteller von Spielzeug-Drohnen beliefern das Spielwarenfachgeschäft Ihres Vertrauens und haben dort den gleichen Anteil an verkauften Drohnen. Bei einem Test stellt sich heraus, dass sich 6% der Drohnen, die von Unternehmen A hergestellt wurden, nicht waagerecht in der Luft schweben können. Beim Hersteller B sind es 8%, 12% bei C und bei Unternehmen D sogar 14%.

1. Sie kaufen im Spielwarenfachgeschäft eine Drohne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie eine Drohne erwerben, die waagerecht schweben kann.
   (Hinweis: Verwenden Sie die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit)
2. Ein Freund hat zwei Drohnen derselben Produktion erworben, von denen eine ziemlich schief in der Luft schwebt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Drohne waagerecht fliegt?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Drohnen Ihres Freundes vom Hersteller D stammen?
   (Hinweis: Verwenden Sie die Formel von Bayes.)

Lösung zu Hausaufgabe 31

Sei A (bzw. B, C, D) das Ereignis: „Die Drohne wurde von Unternehmen A (B, C, D) produziert.“ Diese Ereignisse bilden eine Partition von Ω. Sei außerdem W_1 das Ereignis: „Die Drohne schwebt waagerecht.“ Nach Aufgabenstellung gilt:

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{4}.$$

Des Weiteren sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P(W_1^c|A) = 0.06, \;\; P(W_1^c|B) = 0.08, \;\; P(W_1^c|C) = 0.12, \;\; P(W_1^c|D) = 0.14.$$

Teilaufgabe 1:
Gesucht ist $P(W_1)$. Mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt

$$P(W_1) = P(W_1|A)P(A) + P(W_1|B)P(B) + P(W_1|C)P(C) + P(W_1|D)P(D) = 0.9.$$

Teilaufgabe 2:
Sei W_2 das Ereignis: „Die zweite Drohne fliegt waagerecht.“ Gesucht ist $P(W_2|W_1^c)$. Durch Bedingen auf die Unternehmen erhalten wir

$$\begin{aligned} P(W_2|W_1^c) &= \frac{P(W_2 \cap W_1^c)}{P(W_1^c)} = \frac{\sum_{E\in\{A,B,C,D\}} P(W_2 \cap W_1^c|E)P(E)}{P(W_1^c)} \\ &= \frac{0.94 \cdot 0.06 \cdot 0.25 + 0.92 \cdot 0.08 \cdot 0.25 + 0.88 \cdot 0.12 \cdot 0.25 + 0.86 \cdot 0.14 \cdot 0.25}{0.1} \\ &= 0.89. \end{aligned}$$

Dabei haben wir $P(W_2 \cap W_1^c|E) = P(W_1|E)P(W_1^c|E)$ angenommen.

Teilaufgabe 3:
Gesucht ist $P(D|W_1^c)$. Mit der Formel von Bayes erhalten wir

$$P(D|W_1^c) = \frac{P(W_1^c|D)P(D)}{\sum_{E\in\{A,B,C,D\}} P(W_1^c|E)P(E)} = 0.35$$

oder mit dem Satz zur umgekehrten bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P(D|W_1^c) = \frac{P(W_1^c|D)P(D)}{P(W_1^c)} = 0.35$$

Hausaufgabe 32
Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \subset \Omega$ mit $P(A) > 0$, sowie $0 < P(B) < 1$. Zeigen Sie: A und B sind unabhängig genau dann, wenn $P_{\bar{B}}(A) = P_B(A)$.

Lösung zu Hausaufgabe 32
Unter den Voraussetzungen von oben gilt

$$\begin{aligned} P(A|B^c) &= P(A|B) \\ \Leftrightarrow \quad P(A \cap B^c)P(B) &= P(A \cap B)P(B^c) \\ \Leftrightarrow \quad (P(A) - P(A \cap B))P(B) &= P(A \cap B)(1 - P(B)) \\ \Leftrightarrow \quad P(A)P(B) &= P(A \cap B). \end{aligned}$$

Hausaufgabe 33
Ein fairer Tetraeder mit den Augenzahlen von 1 bis 4 wird zweimal geworfen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A: „Die Summe der Augenzahlen ist gerade.“

B: „Beide Augenzahlen sind kleiner oder gleich 3.“

1. Berechnen Sie $P(A), P(B), P(A \cap B)$ sowie $P_B(A)$.
2. Sind A und B unabhängig? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung zu Hausaufgabe 33
Es sei $\Omega = \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\} = [4]^2$ und P die Gleichverteilung auf Ω.
Teilaufgabe 1:
Es gilt

$$\begin{aligned} A &= \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}, \\ B &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}, \\ A \cap B &= \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3)\}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{9}{16}, \quad P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{5}{16}.$$

Teilaufgabe 2:
Da $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ sind die Ereignisse A und B nicht unabhängig.