Prof. Dr. Rupert Lasser
Paul Bergold

Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Stochastik für Lehramt Gymnasium – Blatt 10

Wintersemester 2016/17

Lösungshinweise

Hausaufgabe 28

In einem Pokerspiel mit 4×13 Karten bekommen Sie eine Hand von fünf Karten. Finden Sie einen entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

1. Sie erhalten einen Drilling. (E_1)
2. Sie erhalten einen Drilling, der weder Teil eines Vierlings noch eines Full House (Drilling und Paar) ist. (E_2)
3. Sie erhalten ein Full House. (E_3)

Lösung zu Hausaufgabe 28

Wir wählen $\Omega = \{A \subset [52] : |A| = 5\}$ (Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge). Außerdem sei $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und P die Gleichverteilung auf Ω. Insbesondere gilt $|\Omega| = \binom{52}{5} = 2.598.960$. Wir definieren das Ereignis E_4: „Sie erhalten einen Vierling“. Dann gilt $E_1 = E_2 \,\dot{\cup}\, E_3 \,\dot{\cup}\, E_4$.

Zu Ereignis E_2: Wir haben 13 Möglichkeiten die Karte des Drillings zu wählen und $\binom{4}{3}$ Möglichkeiten die drei Farben zu wählen. Für die verbleibenden zwei Karten, mit jeweils unterschiedlicher Wertigkeit, gibt es $\binom{12}{2}$ Möglichkeiten die Wertigkeit zu wählen, sowie 4^2 Möglichkeiten für die Farben. Damit folgt

$$|E_2| = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2 = 54.912,$$
$$\Rightarrow \quad P(E_2) = \frac{|E_2|}{|\Omega|} = \frac{54.912}{2.598.960} \approx 2.11\%.$$

Zu Ereignis E_3: Wir haben 13 Möglichkeiten die Karte des Drillings zu wählen und $\binom{4}{3}$ Möglichkeiten die drei Farben zu wählen. Für die verbleibenden zwei Karten, mit derselben Wertigkeit, gibt es 12 Möglichkeiten die Wertigkeit zu wählen, sowie $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten für die Farben. Damit folgt

$$|E_3| = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3.744,$$
$$\Rightarrow \quad P(E_3) = \frac{|E_3|}{|\Omega|} = \frac{3.744}{2.598.960} \approx 0.144\%.$$

Zu Ereignis E_4: Wir haben 13 Möglichkeiten die Karte des Vierlings zu wählen. Für die verbleibende Karte gibt es 12 Möglichkeiten die Wertigkeit und 4 Möglichkeiten die Farbe zu wählen. Damit folgt

$$|E_4| = 13 \cdot 12 \cdot 4 = 624,$$
$$\Rightarrow \quad P(E_4) = \frac{|E_4|}{|\Omega|} = \frac{624}{2.598.960} \approx 0.0240\%.$$

Abschließend erhalten wir

$$|E_1| = |E_2| + |E_3| + |E_4| = 59.280,$$
$$\Rightarrow \quad P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{59.280}{2.598.960} \approx 2.28\%.$$

Hausaufgabe 29

Der Mathematiker Stefan Banach (1892 -1945) hatte stets in beiden Jackentaschen eine Schachtel mit n Streichhölzern. Jedesmal, wenn er Feuer benötigte, wählte er mit gleicher Wahrscheinlichkeit zufällig eine Jackentasche aus und nahm ein Streichholz aus der entsprechenden Schachtel. Falls er eine Schachtel gewählt hatte, die keine Streichhölzer mehr enthielt, so ersetzte er beide Schachteln durch neue. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Banach dabei genau k Streichhölzer wegwarf.

Lösung zu Hausaufgabe 29

Da Herr Banach bis zu $(2n+1)$-mal in die Jackentaschen greift, wählen wir für die Grundmenge $\Omega = \{l, r\}^{2n+1}$. Dabei bedeutet ein l bzw. r an der i-ten Stelle des Tupels, dass beim i-ten Griff in die Tasche gerade die linke bzw. rechte Jackentasche gewählt wird. Des Weiteren sei P die Gleichverteilung auf Ω. Es bezeichne A_k das Ereignis, dass Banach genau k Streichhölzer wegwirft, wobei wir $0 \leq k \leq n$ voraussetzen, da $P(A_k) = 0$ für alle anderen Werte von k. Dann lässt sich A_k disjunkt zerlegen in $A_k = L_k \,\dot{\cup}\, R_k$, wobei L_k (R_k) das Ereignis bezeichne, dass die weggeworfenen Streichhölzer aus der linken (rechten) Tasche stammen. Es gilt $\omega \in L_k$ genau dann, wenn bis zum Erscheinen des $(n+1)$-ten r, der Buchstabe l gerade $(n-k)$-mal auftritt. Es gibt $\binom{2n-k}{n}$ Möglichkeiten, n der $2n-k$ Plätze mit dem Buchstaben r zu besetzen (die anderen Plätze erhalten ein l). Im Anschluss muss ein r folgen und für die verbleibenden k Plätze von ω gibt es dann noch 2^k Möglichkeiten. Aufgrund der Symmetrie des Problems erhalten wir, dass R_k die gleiche Anzahl an Elementen enthält. Somit ergibt sich:

$$P(A_k) = 2 \cdot P(L_k) = 2 \cdot \frac{|L_k|}{|\Omega|} = 2 \cdot \frac{\binom{2n-k}{n} 2^k}{2^{2n+1}} = \binom{2n-k}{n} 2^{k-2n}.$$

Hausaufgabe 30

Sei Ω eine Menge mit n Elementen. Für welche Zahlen k gibt es eine σ-Algebra mit k Elementen? (Hinweis: Klassifizieren Sie die σ-Algebra anhand der Anzahl ihrer Atome, vgl. Aufgabe 2.)

Lösung zu Hausaufgabe 30
Da zu jedem Element $\omega \in \Omega$ genau ein Atom $A(\omega)$ existiert, das ω enthält, kann es höchstens n Atome geben. Sei $i \in [n]$ die Anzahl der Atome einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ über Ω. Da die Elemente von $\mathcal{F}$ durch Vereinigungen der entsprechenden Atome entstehen, folgt $|F| = |\mathcal{P}([i])| = 2^i$. Somit gibt es für jedes $k = 2^i$ eine σ-Algebra mit k Elementen.