Definition 5.19: Für $h \in L^1([a,b],\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit

$$V_a^b h = \sup\left\{ \sum_{i=1}^m |h(a_i) - h(a_{i-1})|,\ m \in \mathbb{N},\ a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b \right\}$$

die Variation der Funktion h auf dem Intervall $[a,b]$.

LEMMA 5.20: (Lasota & Yorke, 73) Sei $f : [0,1] \circlearrowleft$ stückweise C^2 mit $\inf |f'| > 2$. Dann gibt es Konstanten $\alpha > 0$, und $0 < \beta < 1$ mit

$$V_0^1 Ph \le \alpha \|h\| + \beta V_0^1 h .$$

LEMMA 5.21: Für $h \in L^1$ gilt $V_0^1 Q_n h \le V_0^1 h$.

Beweis: [ex.]

LEMMA 5.22: Die Folge $(V_0^1 h_n)_n$ ist beschränkt.

Beweis: Nach Lemma 5.17 gilt

$$h_n = P_n h_n = Q_n P h_n$$

und damit mit Lemma 5.21

$$\begin{aligned} V_0^1 h_n = V_0^1 P_n h_n &= V_0^1 Q_n P h_n \\ &\le V_0^1 P h_n \\ &\le \alpha \|h_n\| + \beta V_0^1 h_n \quad \text{(Lasota, Yorke)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad V_0^1 h_n \le \frac{\alpha}{1-\beta} . \qquad \blacksquare$$

Satz (Helly): Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Falls $|f(x)| \le K$ und $V_a^b f \le K$ für alle f und eine Konstante K, dann gibt es eine Folge $(f_n)_n \subseteq \mathcal{F}$, die punktweise gegen eine Funktion φ mit $V_a^b \varphi \le K$ konvergiert.

Anwendung dieses Satzes auf die Folge $\mathcal{F} = \{h_n\}$ liefert $h = \lim_{i \to \infty} h_{n_i}$ und für h gilt

$$\|h - Ph\| \le \|h - h_{n_i}\| + \overbrace{\|h_{n_i} - Q_{n_i} P_{n_i} h_{n_i}\|}^{=0,\ \text{da } h_{n_i} \text{ Fixpunkt}}$$

$$+ \underbrace{\|Q_{n_i} P_{n_i} h_{n_i} - Q_{n_i} Ph\|}_{\le \underbrace{\|Q_{n_i}\|}_{=1} \underbrace{\|P\|}_{=1} \underbrace{\|h_{n_i} - h\|}_{\to 0}} + \underbrace{\|Q_{n_i} Ph - Ph\|}_{\to 0}$$

Lemma 5.16.

$= Q_{n_i} Q_{n_i} P h_{n_i}$
$= Q_{n_i} P h_{n_i}$

Damit ist h ein Fixpunkt von P und der Beweis von Satz 5.13 ist beendet. $\blacksquare$