5. Berechnung invarianter Maße

Def 5.1: Es sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und ν ein weiteres W-Maß auf $\mathcal{B}$. Dann heißt ν absolut stetig zu μ,

$$\nu \ll \mu,$$

falls für jede Menge A mit $\mu(A) = 0$ auch $\nu(A) = 0$.
μ und ν heißen äquivalent, falls

$$\nu \ll \mu \quad \text{und} \quad \mu \ll \nu.$$

SATZ 5.2 (Radon-Nikodym): $(X, \mathcal{B}, \mu)$ sei ein W-Raum und ν ein W-Maß auf $\mathcal{B}$. Dann gilt
$\nu \ll \mu \iff$ eine bezgl. μ integrierbare Fkt. $h \in \mathcal{L}^1(X)$ existiert, so dass für alle $A \in \mathcal{B}$ gilt

$$\nu(A) = \int_A h \, d\mu.$$

h ist μ-f.ü. eindeutig.

$$h = \frac{d\nu}{d\mu}$$

Es sei X eine Menge und $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra. Ferner sei $f: X \to X$ eine meßbare Fkt.

Def 5.3: Ein W-Maß μ heißt f-invariant, falls

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_{inv}$ die Menge aller invarianten Maße auf X.

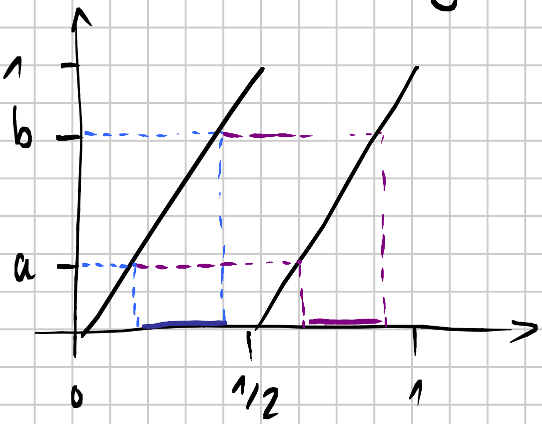
BSP.: – X, $\mathcal{B}$ beliebig und $f = id$. Dann sind alle Maße auf $\mathcal{B}$ invariant.

– X eine Menge, $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$. Definiere

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(X) = 1.$$

Dann ist μ für jede messbare Abb. ein invariantes Maß.

– Es sei $X = [0,1)$ mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$. Ferner sei $f: X \to X$ die durch $f(x) = 2x \bmod 1$ definierte Abbildung.



Dann ist f messbar und invariante Maße sind z.B.

(i) $$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) $$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \in A, \\ 1/2, & \text{falls } \frac{1}{3} \in A \text{ oder } \frac{2}{3} \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(iii) $\mu = m$ (Lebesgue-Maß)

Denn:

$$f^{-1}([a,b)) = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cup \left[\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

$$m(f^{-1}([a,b))) = m\left(\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)\right) + m\left(\left[\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)\right) = m([a,b))$$

Satz 5.4: Es sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra. Dann ist die Menge der $\mathcal{M}$ der zugehörigen W-Maße ein nichtleerer konvexer kompakter metrischer Raum.

Satz 5.5: Es sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra. Die Abbildung $f: X \to X$ sei ein Homöomorphismus. Dann existiert ein f-invariantes Maß, d.h. $\mathcal{M}_{inv} \neq \emptyset$.

Beweise z.B. in: R. Mañé: Ergodic Theory and Differential Dynamics, Springer, 1987. (Kapitel I.8).