Mengenorientierte Numerik — 5 —

Notiztitel 22.11.2005

3. Implementation des Unterteilungsalgorithmus

GAIO: „Global Analysis of Invariant Objects"

Die Sammlungen $\mathcal{B}_k$ bestehen aus (verallgemeinerten) Rechtecken („Boxen", „Zellen"):

$$B(c,r) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid |y_i - c_i| \leq r_i \;, \quad i = 1, \dots, n \}$$

$c \in \mathbb{R}^n$ Zentrum, $r \in \mathbb{R}^n$, $r_i > 0$, Radius.

Im k-ten Unterteilungsschritt unterteilen wir jede Box durch Bisektion in der j-ten Koordinate, wobei j zyklisch variiert, d.h.

$$j = \big((k-1) \bmod n\big) + 1 .$$

Man erhält zwei neue Boxen $B(c^-,\hat{r})$ und $B(c^+,\hat{r})$ mit

$$c_i^{\pm} = \begin{cases} c_i, & i \neq j, \\ c_i \pm \frac{r_i}{2}, & i = j, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \hat{r}_i = \begin{cases} r_i, & i \neq j, \\ r_i/2, & i = j. \end{cases}$$

<u>Auswahlschritt</u>:

Bestimme alle $B' \in \hat{\mathcal{B}}_k$ mit $f(B) \cap B' \neq \emptyset$. $\quad (*)$

in einfachen Fällen: analytisch ($f(x) = \beta x$)

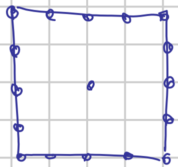
meistens jedoch: Diskretisierung von (*) erforderlich.

einfachste Möglichkeit: wähle in jeder Box $B \in \hat{\mathcal{B}}_h$ eine endliche Teilmenge $T \subset B$ von Testpunkten und bestimme alle Boxen $B' \in \hat{\mathcal{B}}_h$ mit

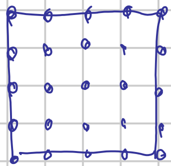
$$f(T) \cap B' \neq \emptyset.$$

Typische Wahlen für Testpunkte:

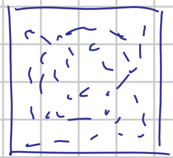
$n=2$



$n=3,4$



$n>4$



Bemerkung: Da $f(T) \subset f(B)$, aber i.A. nicht "=",
kann es vorkommen, dass

$$\left.\begin{aligned} f(T) \cap B' &= \emptyset \\ \text{obwohl} \quad f(B) \cap B' &\neq \emptyset, \end{aligned}\right\} (**)$$

d.h. wir entfernen unberechtigterweise Boxen aus der aktuellen Sammlung.
Falls Lipschitz-Konstanten für die Abbildung f bekannt sind, kann die Wahl der Testpunkte so ausgelegt werden, dass $(**)$ nicht passiert.

Andere Möglichkeit zur Realisierung des Auswahlschrittes:

Intervallarithmetik

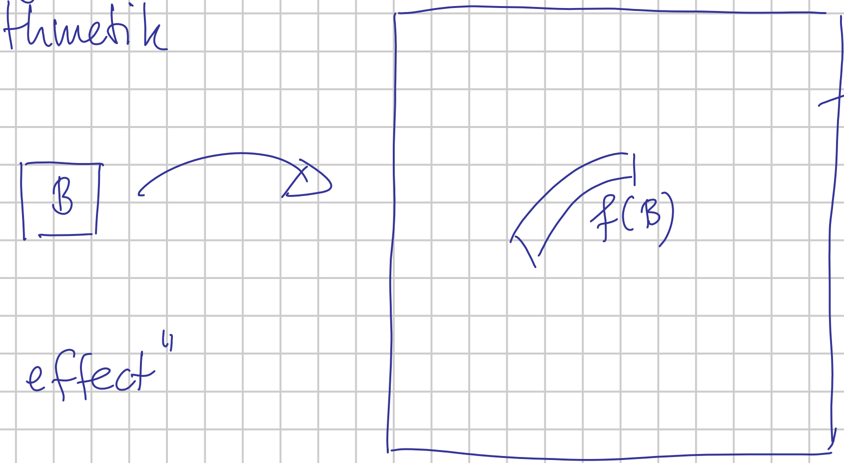
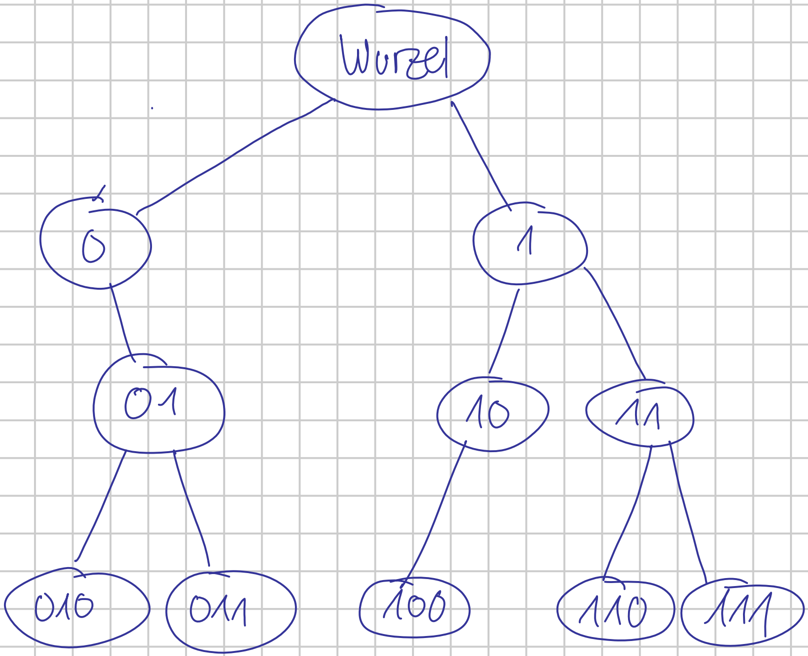


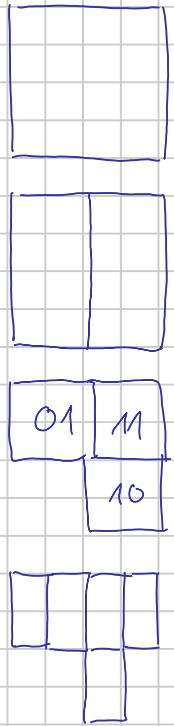
Bild von B berechnet mit Intervallarithmetik

"wrapping effect"

Speicherung der Box-Sammlungen

Die Folge der Sammlungen $\mathcal{B}_k$ kann in einem Binärbaum gespeichert werden!





$B_0 = \{Q\}$

B_1

B_2

B_3

Bemerkung: Es genügt, Zentrum und Radius für die Wurzel zu speichern, die Geometrie der Boxen der folgenden Sammlungen ergibt sich aus der Struktur des Baums.

Rechenaufwand: wir betrachten den k-ten Unterteilungsschritt. Sei N_ℓ die Anzahl der Boxen in der Sammlung $\mathcal{B}_\ell$ und $p = |T|$. Wir erhalten

$$F_k = 2pN_{k-1}$$

Testpunkte im k-ten Schritt, deren Bild unter f zu berechnen ist. Der Auswahlschritt wird durch eine Tiefensuche im Baum realisiert. Aufwand: $3k$ Flops, d.h. insgesamt

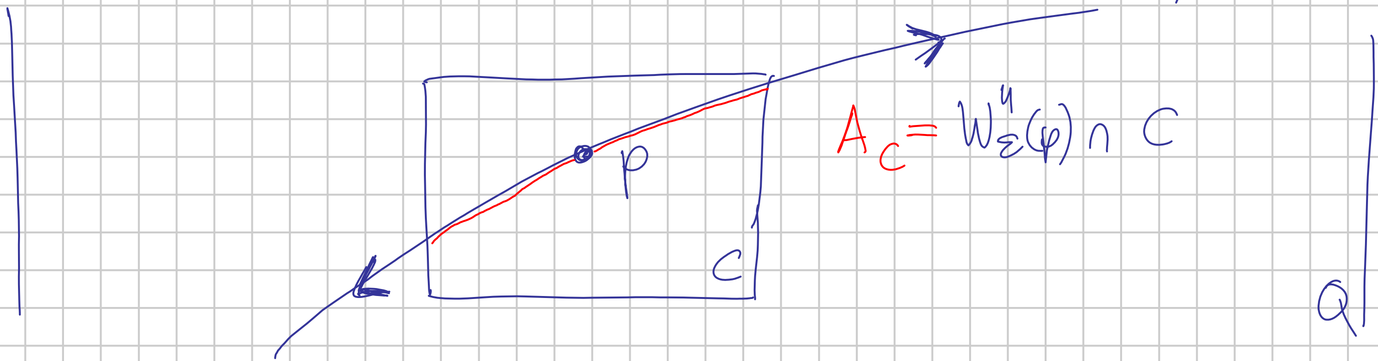
$$6kpN_{k-1} \text{ Flops.}$$

4. Der Fortsetzungsalgorithmus

Ziel: Berechnung der globalen instabilen Mannigfaltigkeit eines hyperbolischen Fixpunkts

grundlegende Beobachtung:

$$W^u(p) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^k\left(W^u_\varepsilon(p)\right)$$



$$A_C = W^u_\varepsilon(p) \cap C$$

Wir betrachten einen hyperbolischen Fixpunkt $p \in \mathbb{R}^n$ und fixieren eine („große") Menge $Q \subset \mathbb{R}^n$, in der wir Teile der globalen instabilen Mannigfaltigkeit von p berechnen wollen. Wir betrachten eine Familie von Partitionen $\mathcal{P}_\ell$ von Q, d.h. $\mathcal{P}_\ell$ ist eine endliche Sammlung von Teilmengen von Q mit

$$\bigcup_{P \in \mathcal{P}_\ell} P = Q \quad , \quad P \cap P' = \emptyset \quad \text{f. } P \neq P' .$$

Die Familie $(\mathcal{P}_\ell)_\ell$ soll geschachtelt sein, d.h.

$$P \in \mathcal{P}_{\ell+1} \Rightarrow P \subset P' \in \mathcal{P}_\ell \quad , \quad \operatorname{diam}(P) < \Theta \operatorname{diam}(P') \quad , \quad 0 < \Theta < 1 .$$

Angenommen $C \in \mathcal{P}_\ell$ sei eine Umgebung von p, so dass

$$A_C = W^u_\varepsilon(p) \cap C.$$

Wir wenden jetzt k Schritte des Unterteilungsalgorithmus auf $\mathcal{B}_0 = \{C\}$ an und erhalten eine Überdeckung $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{P}_{\ell+k}$ der lokalen instabilen Mannigfaltigkeit $W^u_\varepsilon(p) \cap C$.

<u>Fortsetzungsalgorithmus</u>: Wir setzen $\mathcal{C}_0^{(k)} = \mathcal{B}_k$ und berechnen $\mathcal{C}_{j+1}^{(k)} = \{ B \in \mathcal{P}_{\ell+k} \mid B \cap f(B') \neq \emptyset \text{ für ein } B' \in \mathcal{C}_j^{(k)} \}$.

<u>Bemerkung</u>: Sei $C_j^{(k)} = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_j^{(k)}} B$, dann gilt $C_j^{(0)} \supset C_j^{(1)} \supset \cdots$