Mengenorientierte Numerik - 11 -

Notiztitel 31.01.2006

Satz 7.3: Für $x \in S$ gilt $V_{p(\ell)}(x) \to V(x)$ für $\ell \to \infty$.

Beweis: Widerspruchsbeweis: wir nehmen an,

$$\lim_{\ell \to \infty} V_{p(\ell)}(x) = \bar{V}(x) < V(x).$$

Wir konstruieren nun eine Trajektorie $(x_k(x, \bar{u}))_k$ mit $J(x, \bar{u}) \leq \bar{V}(x)$, dies steht im Widerspruch zur Def. von V und zeigt, dass unsere Annahme falsch ist.

Dazu verwenden wir Pfade mit unendlich vielen Kanten: jeden gegebenen Pfad $p^{(\ell)} = (e_1^{(\ell)}, \dots, e_{m(\ell)}^{(\ell)})$ können wir formal auf einen Pfad $p^{(\ell)} = (e_1^{(\ell)}, \dots, e_{m(\ell)}^{(\ell)}, o^{(\ell)}, o^{(\ell)}, \dots)$, wobei $o^{(\ell)} = (P^{(\ell)}(0), P^{(\ell)}(0))$ mit $w(o^{(\ell)}) = 0$ (eine solche Kante existiert, weil $f(0,0) = 0$ und ihr Gewicht ist 0, da $g(0,0) = 0$).

Wir betrachten eine Folge $(p^{(\ell)})_\ell$ von minimierenden Pfaden, $p^{(\ell)} = (e_1^{(\ell)}, \dots, e_{m(\ell)}^{(\ell)}, o^{(\ell)}, \dots)$, $e_k^{(\ell)} = (P_{k-1}^{(\ell)}, P_k^{(\ell)})$. Es gilt $x \in P_0^{(\ell)}$ (per Def.), wir setzen $x_0^{(\ell)} = x$. Wähle $\tilde{x}_0^{(\ell)} \in P_0^{(\ell)}$ und eine Kontrolle $u_0^{(\ell)} \in U$ mit
$= x_0$

$$g(\tilde{x}_0^{(\ell)}, u_0^{(\ell)}) = \min_{\substack{x \in P_0^{(\ell)} \\ u \in U}} \{ g(x,u) \mid f(x,u) \in P_1^{(\ell)} \} = w(e_1^{(\ell)})$$

Setze $x_1^{(\ell)} = f(\tilde{x}_0^{(\ell)}, u_0)$. Da X kompakt ist, hat $(x_1^{(\ell)})_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_1^{(\ell)})_{\ell \in \hat{L}_0}$ für $\hat{L}_0 \subset \mathbb{N}$. Ihr Grenzwert sei $x_1 \in X$. Behauptung: $\exists u_0 \in U$, so dass $x_1 = f(x_0, u_0)$.

Es gilt zunächst, da $\operatorname{diam}(P^{(\ell)}) \to 0$ für $\ell \to \infty$, dass $\tilde{x}_0^{(\ell)} \to x_0$ für $\ell \to \infty$. Da U kompakt ist, können wir eine konvergente

Teilfolge $(u_0^{(\ell)})_{\ell\in L_0}$ von $(u_0^{(\ell)})_{\ell\in\hat{L}_0}$ auswählen, $L_0\subset\hat{L}_0$, ihr Grenzwert sei u_0. Wegen der Stetigkeit von f folgt $x_1=f(x_0,u_0)$.
Wir wiederholen diese Konstruktion mit x_1 und erhalten einen Punkt $x_2\in X$ als Grenzwert einer Folge $(x_2^{(\ell)})_{\ell\in L_1}$, $L_1\subset L_0$, usw.
„Diagonalargument": wir haben eine Folge $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von $\mathbb{N}$ konstruiert mit $L_{k+1}\subset L_k$. Wir wählen jetzt $\ell_0\in L_0$ beliebig und induktiv $\ell_k\in L_k$, $k=1,2,\ldots$, so dass $\ell_k>\ell_{k-1}$ und setzen $L=\{\ell_0,\ell_1,\ldots\}$. Aufgrund dieser Konstruktion ist $\{\ell_k,\ell_{k+1},\ldots\}\subset L_k$. Daher gilt

$$\lim_{\ell\in L}\tilde{x}_k^{(\ell)}=\lim_{\ell\in L}x_k^{(\ell)}=x_k \quad\text{und}\quad \lim_{\ell\in L}u_k^{(\ell)}=u_k.$$

Aufgrund der Stetigkeit von g gilt nun

$$g(x_k,u_k)=\lim_{\ell\in L}g(\tilde{x}_k^{(\ell)},u_k^{(\ell)})=\lim_{\ell\in L}w(e_{k+1}^{(\ell)}).$$

Wir erhalten also als akkumulierte Kosten (mit $\bar{u}=(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$):

$$\begin{aligned}
J(x,\bar{u})=\sum_{k=0}^{\infty}g(x_k,u_k)&=\lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}g(x_k,u_k)\\
&=\lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}\lim_{\ell\in L}g(\tilde{x}_k^{(\ell)},u_k^{(\ell)})\\
&=\lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}\lim_{\ell\in L}w(e_{k+1}^{(\ell)})\\
&=\lim_{K\to\infty}\lim_{\ell\in L}\sum_{k=0}^{K}w(e_{k+1}^{(\ell)})\\
&\le\lim_{K\to\infty}\lim_{\ell\in L}\sum_{k=0}^{m(\ell)-1}w(e_{k+1}^{(\ell)})\\
&=\lim_{\ell\in L}\sum_{k=0}^{m(\ell)-1}w(e_{k+1}^{(\ell)})=\lim_{\ell\in L}V_{p(\ell)}(x)=\overline{V}(x)
\end{aligned}$$

Da (nach Annahme) $\overline{V}(x) < V(x)$, haben wir also eine Trajektorie gefunden, deren Kosten echt kleiner als $V(x)$ sind — dies ist ein Widerspruch. Es bleibt zu zeigen, dass die konstruierte Kontrollfolge tatsächlich stabilisierend ist, d.h. dass $x_k \to 0$ für $k \to \infty$. Wäre aber $\bar{u}$ nicht stabilisierend, dann gäbe es eine Teilfolge $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $x_{k_j} \notin U_\delta$ für eine Umgebung U_δ der 0, für diese Teilfolge würde gelten:

$$g(x_{k_j}, *) \geq \alpha_\delta > 0$$

und dies widerspräche der Tatsache, dass $J(x,u) \leq \overline{V}(x) < \infty$.

<u>Ausblick: (Optimale Regelung)</u>

<u>(Bellmann'sche) Optimalitätsprinzip:</u>

$$V(x) = \inf_{u\in U} \{g(x,u) + V(f(x,u))\}$$

Feedback: $u: S \to U$,

$$u(x) = \text{„}\arg\inf_{u\in U}\text{"} \{g(x,u) + V(f(x,u))\}$$