

**Hyperbolic Conservation Laws and
Compressible Flow
&
Two-Phase Compressible Flow**

Yongming Luo

25.01.2011

Die Probleme, die den hyperbolischen Erhaltungssätzen entsprechen, können wir mit den numerischen Methoden, die wir in den vorigen Vorträgen gelernt haben, lösen. Jetzt will ich erst mal mit dem Hyperbolic Conservation Laws anfangen.

1. Hyperbolische Erhaltungssätze und Kompressibilitätsfluß

1.1 Hyperbolische Erhaltungssätze

Ein Kontinuumsphysikssystem ist durch den Erhaltungssätzen von Mass, Impuls und Energie zu beschreiben. Das lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dV + \int_{\partial\Omega} \vec{f}(u) \cdot dA = \int_{\Omega} s(u) dV. \quad (1.1)$$

Hier bezeichnet u die Dichte der Erhaltungsgröße, $\vec{f}(u)$ den Fluss und $s(u)$ den Quotienten der Quelle. Wenn wir Ω beliebig klein betrachten und die Divergenztheoreme benutzen können wir die Differentialform ableiten:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{f}(u) = s(u). \quad (1.2)$$

Die obige Differentialform ist die Basis für die numerischen Modelle der Kontinuumsphysiksysteme.

1.1.1 Massekonvektion und Wellen

Unter einer Massekonvektion versteht man die Bewegung eines Großteils von einem Punkt zu einem anderen. Unter einer Welle versteht man ein räumlich und zeitlich veränderliches Feld, das Energie, jedoch keine Materie, durch den Raum transportiert. Die Welle bewegt sich mit der Schallgeschwindigkeit in dem System. Durch die Superposition der Wellen nehmen sich die Wellen ab oder nehmen sie sich zu.

Das folgende ist die einfachste lineare Gleichung, die Massekonvektion beschreiben kann:

$$u_t + \vec{v} \cdot \nabla u = 0. \quad (1.3)$$

Hier ist \vec{v} die konstante Geschwindigkeit der Konvektion. Die Lösung dieser Gleichung zeigt, dass u mit der Geschwindigkeit v transportiert. Diese Gleichung korrespondiert zu der von Welle, wenn u eine Sinuswelle und \vec{v} die Schallgeschwindigkeit im System sind. Wenn \vec{f} glatt ist und u keinen Sprung hat, lässt sich (1.2) so darstellen:

$$u_t + \nabla \cdot \vec{f}(u) = 0. \quad (1.4)$$

Und man kann sogar folgen:

$$u_t + \vec{f}'(u) \cdot \nabla u = 0. \quad (1.6)$$

Es sieht so aus, dass $\vec{f}'(u)$ sich wie die Konvektionsgeschwindigkeit sehen lässt. $\vec{f}'(u)$ wird die lokal charakteristische Geschwindigkeit des Flusses.

Massekonvektion und Wellen sind wichtig, weil sie in bestimmter Richtung mit bestimmter Geschwindigkeit propagieren. Dagegen propagiert die Diffusion in alle Richtungen mit beliebigem Tempo. Die obigen Eigenschaften von Massekonvektion und Wellen führen zu der Upwind Differencing Methode, und die diskrete Propagationsgeschwindigkeit sollte mindestens so groß sein wie die charakteristische Propagationsgeschwindigkeit. Das ist nämlich die CFL(Coutant-Friedrichs-Lewy)-Beschränkung.

Diese beiden Konvektionen erzeugen keine scharfe Graphe im Fluss. Die anderen Konvektionen sind wegen ihrer Unstetigkeit (Sprünge) speziell. Und sie sind wegen dieser Sprünge numerisch schwer zu lösen.

1.1.2 Kontaktunstetigkeit

Unter einer Kontaktunstetigkeit versteht man ein unstetiger Sprung zwischen zwei Zonen der unterschiedlichen Dichte, wie z.B der Kontakt, der Wasser und Öl trennt. Solche Sprünge erscheinen oft bei dem

Kontakt. Der Kontakt bewegt sich mit der charakteristischen Geschwindigkeit. Darum können wir die Gleichung (1.3) benutzen mit einer Treppenfunktion für die Anfangsdaten. Wenn wir Kontaktunstetigkeit als Massekonvektion halten, behalten sie die Perturbationen, die sie bekommen haben. Deshalb sollen Kontaktunstetigkeit sensibel zu den numerischen Methoden sein, was wir erwarten.

1.1.3 Stoßwellen

Stoßwellen sind die räumlichen Sprünge in materiellen Eigenschaften (wie z.B Druck und Temperatur), die spontan entwickeln werden. Im Gegensatz zu Kontaktunstetigkeit formen und behalten die Shockssprünge selbst. Stoßwellen gründen sich auf ein „feedback mechanism“. Sie erscheinen, wenn die starken Impulse schneller sind als die schwache Impulse, wenn sie sich durch ein System bewegen. Ein Beispiel dafür ist das „sonic boom“ eines Flugzeugs.

Die einfachste Modelgleichung, die das Shock beschreibt, ist die eindimensionale Burgersgleichung:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0. \quad (1.7)$$

Die obige Gleichung sieht wie (1.3) aus, die mit einer nichtkonstanter Konvektionsgeschwindigkeit u ist, $u_t + uu_x = 0$. Wenn u schneller ist, fangen sie kleinere Werte. Das führt zu einem right-going shock, wenn die Anfangswerte für u eine positive, steigende Funktion konstruieren.

Die Geschwindigkeit vom Shock wird kontrolliert von der Differenz des Einflusses und Ausflusses. Insbesondere nehmen wir an, dass eine Erhaltungsgröße mit dem Erhaltungssatz

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1.8)$$

eine Treppenfunktionkonstruktur hat. Die linke konstante Geschwindigkeit ist u_L , die rechte u_R . Und wir nehmen an, dass die Geschwindigkeit des Sprungs s ist. Wendet (1.1) auf jedem Interval, das das Shock enthält, an, bekommen wir:

$$s(u_R - u_L) = f(u_R) - f(u_L). \quad (1.9)$$

Das ist wichtig für die numerischen Verfahren, weil wir eine genaue

Geschwindigkeit vom Shock fangen können, wenn die Gleichung eine Erhaltungsform besitzt. Wenn der Quotient von u an einem Knoten gleich die Differenz der Flüsse, haben wir gute Approximationen vom realen Fluß.

Die Self-Sharpening-Konstruktion vom Shock bringt der numerischen Methode zwei Auswirkungen. Erstens, die steilen Gradienten erzeugt werden, sogar die Anfangswerte glatt sind. Zweitens, die durch modern numerische Methode erzeugte Fehler, die nahe Shock liegen, werden beseitigt.

1.1.4 Verdünnungswellen

Eine Verdünnung ist ein unstetiger Sprung oder steiler Gradient im Objekt, die wie eine glatte Expansion auflöst. Ein Beispiel dafür ist die Auflösung der Luft des explodierenden Ballons. Eine Verdünnung lässt sich durch die Burgersgleichung wie oben modellieren mit den Anfangsdaten, die eine steile Treppe entlang liegen. Diese Treppe ändert sich breiter und glatter durch den Prozess.

Eine Verdünnung erzeugt glatte Gradienten und darum ist die numerische Lösung einfacher zu darstellen. Trotzdem verbindet eine Verdünnung ein glattes Lösungsgebiet und das Gebiet liegt in einem „corner“, so dass man die genaue Lösung schwer bekommen kann. Das Hauptnumerikproblem von Verdünnung ist der Start der Expansion. Wenn die Anfangswerte eine symmetrische Treppe ist, wie z.B. $u(x) = \text{sign}(x)$, wird es stoppen, weil die stationäre Burgersgleichung überall gleich sind. Jedoch wird die lokale Analyse die nicht bewegende Expansion identifizieren. Deswegen werden damit wird Glätten für einige zwischenliegenden Werte benutzt, damit die Flüsse nicht konstant bleiben. Solches Glätten für einen Sprung, wo eine Expansion zeigt, heißt „entropy fix“, wenn es erlaubt, das Problem in einem System mit einer künstlich kleinen Entropiezunahme zu lösen ist.

1.2 Diskrete Konvektionsform

Um die richtige Geschwindigkeit der Bewegung vom Shock zu bekommen, müssen wir die Gleichung in eine diskrete Erhaltungsform schreiben. Das ist die Form, in der der Quotient der Änderung der Erhaltungsgröße gleich die Differenz der Flüsse ist.

Normalerweise benutzen wir diese Form für die Durchschnittswerte eines Intervalls. Sei x_i ein Gitterpunkt, der Mittelpunkt vom Intervall der Gitterpunkte $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ ist. Integriere (1.8), bekommen wir:

$$\bar{u}_t + f(u_{i+1/2}) - f(u_{i-1/2}) = 0. \quad (1.10)$$

Wobei \bar{u} der Integral von u über den ganzen Intervall und $u_{i\pm 1/2}$ die unbekanntenen Werte von den Grenzen des Intervalls sind. Die Schwierigkeit liegt darin, dass wir die Werte der Grenzen nicht wissen und das rekonstruiert werden kann. Dieses Problem kann man eindimensional leicht lösen, welches viel komplizierter im mehrdimensionalen Raum zu lösen ist. Wenn wir eine numerische Methode, die eine Genauigkeit höher als zweite Ordnung besitzt, können wir die Unterschiede der Werte zwischen Mittelpunkt und Grenzpunkt ignorieren. Sie erzeugen unter diesem Fall ein $O(\Delta x^2)$ -Fehler.

In dem Buch zeigt der Autor eine andere Methode, in der man nur Gitterpunkte zu betrachten braucht. Definiere F durch die folgenden Form

$$f(u)_x = \frac{F(x + \Delta x/2) - F(x - \Delta x/2)}{\Delta x} \quad (1.11)$$

für jedes x . Wir sagen, F ist der numerische Fluss. Aus dem Taylorpolynom folgt

$$F = f(u) - \frac{(\Delta x)^2}{24} f(u)_{xx} + \frac{7(\Delta x)^4}{5760} f(u)_{xxxx} - \dots \quad (1.12)$$

und weiter kann man folgen

$$u_t + \frac{F(x + \Delta x/2) - F(x - \Delta x/2)}{\Delta x} = 0. \quad (1.13)$$

1.3 ENO für Erhaltungssätze

1.3.1 Motivation

ENO-Methoden dienen zu den numerischen Problemen und sie sollten auch gültig für die steile Gradienten sein. Beispiele dafür sind Shocks und Kontaktunstetigkeit. Entweder führen die alten Methoden zu störenden Schwingungen oder schmieren sie die Gradienten oder Details vom Fluss. Also brauchen wir eine neue Methode. Die ENO-Methode hat eine hohe Genauigkeit für die Systeme der Erhaltungssätze auf glatte

Gebiete. Sie erzeugt auch keine störende Schwingungen, weil sie keine Methode der hohen Ordnung ist. Außerdem benutzt ENO-Methode eine adaptiv polynomiale Interpolation, um die steile Gradienten zu vermeiden.

Die originale ENO-Methode entwickelte Harten¹. Die begründet sich auf die Basis Diskretisierung des Volumens der Erhaltungskontrolle. Das Problem für diese Methode besteht darin, dass sie einen komplizierten Transport zwischen Durchschnittswerte der Intervalls und den Wert des Mittelpunkts des Intervalls braucht. Im Buch hat der Autor eine andere Methode gezeigt, die diese Kompliziertheit vermeiden kann. Betrachten wir den eindimensionalen Fall. Aus der Gleichung (1.3) kann man folgen, dass der räumliche Graph in einem Zeitschritt Δt $v \cdot \Delta t$ bewegen wird. Seien u_L der konstante Wert für die linken Gitterpunkte x_1, \dots, x_j , u_R der konstante Wert für die rechten Gitterpunkte x_{j+1}, \dots, x_N .

Rekonstruieren wir den Graph $u(x)$ nahe des Punkts x_i mit der Interpolationsmethode, dann schieben wir u im Raum eine Distanz von $v \cdot \Delta t$. Machen wir analog wie oben und bekommen wir den Wert u von x_i momentan. Dann können wir den Wert u_i von x_i im Prozess der Zeit betrachten. Nahe des Sprungs gibt es ein „overshot“, was wir durch sukzessive Zeitschritt verbessern können.

Um die Schwingungen zu vermeiden können wir stattdessen eine glatte lineare Interpolation nahe x_i benutzen. Aber das führt zu niedriger Genauigkeit. Wenn wir nahe Sprünge numerische Methode höherer Ordnung benutzen, haben wir wieder Schwingungen. Deshalb interpolieren wir die Punkte, die nicht nahe Sprünge liegen. Jedoch werden die kleinen Schwingungen als diskrete abgetastete Punkte, die nahe des Extremas liegen, betrachtet. Deshalb ist die Methode wesentlich nicht schwingend.

1.3.2 Konstrukt der Numerischen Flußfunktion

Wie in (1.10) haben wir

$$f(u)_x = \frac{F(x + \Delta x/2) - F(x - \Delta x/2)}{\Delta x}. \quad (1.14)$$

Um die numerische Flußfunktion leicht zu bekommen definieren wir h durch die folgende Gleichung:

¹ Harten, A., Engquist, B., Osher, S., and Chakravarthy, S., *Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes III*, J. Comput. Phys. 71, 231-303 (1987)

$$f(u(x)) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} h(y) dy. \quad (1.15)$$

Leiten wir beide Seiten ab, haben wir

$$f(u(x))_x = \frac{h\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - h\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}, \quad (1.16)$$

wobei h die numerische Flußfunktion gleich ist. Sei H definiert durch

$$H(x) = \int_{x_{-1/2}}^x h(y) dy. \quad (1.17)$$

Also können wir H interpolieren und leiten wir H ab, damit wir h bekommen können. Die dividierte Differenz nullter Ordnung brauchen wir nicht, weil sie beim Ableiten verschwunden wird.

Die dividierte Differenz $D_{i+1/2}^0$ und alle andere gerade dividierten Differenzen höherer Ordnung von H existieren und haben Index $i \pm 1/2$. Die dividierte Differenz D_i^1 und alle andere ungerade dividierten Differenzen höherer Ordnung von H existieren und haben Index i . Wir haben:

$$D_i^1 H = \frac{H\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) - H\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)}{\Delta x}. \quad (1.18)$$

Daraus kann man weiter folgen:

$$H\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = \int_{x_{-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} h(y) dy = \sum_{j=0}^i \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} h(y) dy \quad (1.19)$$

$$= \Delta x \sum_{j=0}^i f\left(u(x_j)\right). \quad (1.20)$$

Und höhere dividierte Differenzen sind:

$$D_{i+1/2}^2 H = \frac{f(u(x_{i+1})) - f(u(x_i))}{2\Delta x} = \frac{1}{2} D_{i+1/2}^1 f, \quad (1.21)$$

$$D_i^3 H = \frac{1}{3} D_i^2 f, \quad (1.22)$$

und analog folgen wir induktiv andere Differenzen.

Nach Polynomeinterpolation können wir H mit den Differenzen rekonstruieren. Und es sind zwei Punkte in ENO-Rekonstruktion wichtig. Erstens, man wählt $D_i^1 H$ mit Upwind-Differencing-Methode; Zweitens, wähle der Wert höherer dividierter Differenz aus dem kleineren absoluten Wert der beiden Möglichen. Wenn wir $H(x)$ konstruiert haben, rechnen wir $H'(x_{i+\frac{1}{2}})$ aus, dann bekommen wir

$F_{i+1/2}$.

2. ZweiphasenkompRESSIBILITÄTSFLUß

2.1 Einleitung

Mulder ² benutzte in der Geschichte das erste Mal die Level-Set-Methode für das Problem des two-phase DünflüßigkeitkompRESSIBILITÄTSFLUSSes. Er hat die folgende Levelsetgleichung

$$\phi_t + \vec{V} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (2.1)$$

benutzt, die die Standardgleichung für one-phase KompRESSIBILITÄTSFLUß ist. Hier beschreibt \vec{V} die Geschwindigkeit des KompRESSIBILITÄTSFLUSSes, so dass die nullte Niveaulinie der Geschwindigkeit der Teilchen entsprechen und unterschiedliche Gase trennt. In dem Buch von Mulder benutzte er nur den Gammaansatz, in dem $\gamma = \gamma_1$ für $\phi > 0$ und

² Mulder, W., Osher, S., and Sethian, J., *Computing Interface Motion in Compressible Gas Dynamics*, J. Comput. Phys. 100, 209.228 (1992).

$\gamma = \gamma_2$ für $\phi \leq 0$ angenommen werden. Später zeigte Karni³, dass solche Method eine Schwingung verursachen kann auf dem Interface. Im Bild 2.1 sind die Proben der Method von Mulder. Das ist eine right-going Stoßwelle auf der Oberfläche. Wir können sehen, dass die Schwingungen nahe der Sprünge liegen.

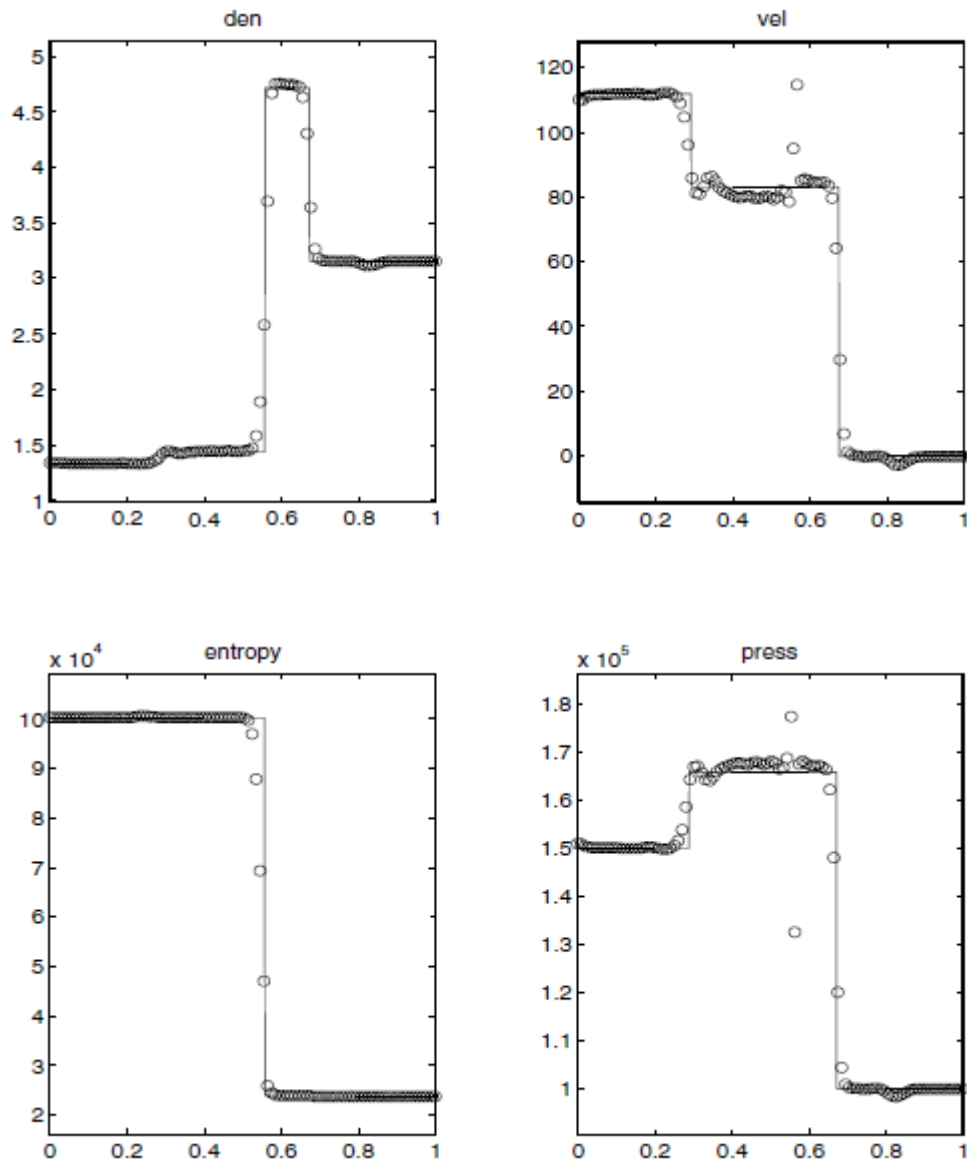


Bild 2.1. Schwingungen von Druck und Geschwindigkeit bei der Benutzung der Method von Mulder. Die Kreise beschreiben die numerische Lösung. Die feste Linie beschreibt die exakte Lösung.

2.2 Fehler an Unstetigkeit

Die exakte Lösung des Graphs 2.1 zeigt uns, dass der Druck und

³ Karni, S., *Multicomponent Flow Calculations by a Consistent Primitive Algorithm*, J. Comput. Phys. 112, 31.43 (1994).

Geschwindigkeit stetig nahe des Sprungs sind, wenn die Dichte und Entropie unstetig sind. Wir sollen darauf achten, dass die Werte im Dichtebild, die naher Kontaktunstetigkeit liegen, sollen etwa 1,5 für die linken Punkte und 4,75 für die rechten Punkte sein. Die Zwischenwerte, die in der Nähe von 2,5 liegen, haben einen $O(1)$ Fehler. Das folgt daraus, dass der Fehler der Druck und Geschwindigkeit nicht schlechter als der in der Dichte. (Das folgt man aus dem Kapitel 14, das ich hier nicht geschrieben habe.) Der einzige Unterschied liegt darin, dass in der Tat der Fehler der Dichte dissipativ ist und der Fehler der Druck und Geschwindigkeit dispersiv ist.

Aber ein Argument, dass der dispersive Fehler schlechter als der dissipative Fehler ist, ist, dass der dispersive Fehler ein neues Extrem erzeugen wird. Das verletzt die Monotonie der Lösung. Wenn die beiden Gase gut mit dem Gammaansatz verhalten können, kann man die Schwingungen von Druck und Geschwindigkeit entfernen ohne das Schmieren in der Dichte zu beseitigen. Jedoch ist das Entfernen von Schwingungen viel schwerer, wenn ein Gas von den Beiden eine komprimierbare Taitgleichung hat. Natürlich können wir alle Schwingungen leicht und sofort entfernen. Das können die Leser weiter im Buch selbstlesen.