Analysis III für LB

Notiztitel 09.01.2006

6. Differenzierbarkeit von vektorwertigen Funktionen

<u>Def 6.1</u>: Sei $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine Funktion. f heißt im Punkt $a \in U$ (total) differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung (Matrix)

$$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

gibt, so dass in einer Umgebung von a gilt

$$f(a+h) = f(a) + Ah + \varphi(h),$$

wobei

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0.$$

<u>Beispiel 6.2</u>: Es sei $f(x) = \langle x, Cx \rangle$ mit $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

Wir wollen nachweisen, dass f differenzierbar ist:

$$f(a+h) = \langle a+h, C(a+h) \rangle = \langle a+h, Ca + Ch \rangle$$

$$= \langle a, Ca \rangle + \langle h, Ca \rangle + \langle a, Ch \rangle + \langle h, Ch \rangle$$

$$= f(a) + \langle h, Ca \rangle + \langle C^T a, h \rangle + \langle h, Ch \rangle$$

$$= f(a) + \underbrace{2\langle Ca, h \rangle}_{\text{lin. Abb.}} + \underbrace{\langle h, Ch \rangle}_{= \varphi(h)}$$

$\langle a, Ch \rangle$
$= a^T C h$
$= (a^T C h)^T$
$= h^T C^T a$
$= \langle h, C^T a \rangle$

Cauchy-Schwarz: $\langle a, b \rangle \leq \|a\| \, \|b\|$

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\langle h, Ch \rangle}{\|h\|} \leq \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\cancel{\|h\|} \, \|Ch\|}{\cancel{\|h\|}}$$

$$\leq \lim_{\|h\| \to 0} \|C\| \, \|h\| = 0$$

Satz 6.3: Sei $f: U \to \mathbb{R}^m$ in $a \in U$ differenzierbar, d.h.

$$f(a+h) = f(a) + Ah + \varphi(h), \qquad A = (a_{ij})_{i,j}$$

dann gilt

a) f ist in a stetig;

b) alle Komponenten von f sind partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = a_{ij}.$$

f in a stetig:
$\lim_{a_n \to a} f(a_n) = f(a)$
für alle Folgen $(a_n)_n$ mit $a_n \to a$.

Bemerkung: Diese Matrix A heißt das Differential, die Jacobi-Matrix oder die Funktional-Matrix. Schreibweisen:

$$A = Df(a) = Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j}$$

Satz 6.4: Sei $f: U \to \mathbb{R}^m$ eine in $U \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbare Funktion. Alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ seien in $a \in U$ stetig, dann ist f in a total differenzierbar.

Satz 6.5: (Kettenregel) Seien $g: V \to \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, und $f: U \to \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^m$, Funktionen mit $g(V) \subset U$. Die Funktion g sei in $a \in V$ differenzierbar und f sei in $g(a)$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ differenzierbar mit

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a)) \cdot Dg(a).$$

Beispiel 6.6: $g(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, $x = (x_1, x_2)^T$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$Dg(t) = (-\sin t, \cos t)^T$$

$$\left[g(t+h) = (\cos(t+h), \sin(t+h))^T = \cdots \right]$$

$$Df(x) = (2x_1, 2x_2)$$

$$(f \circ g)(t) = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

$$D(f \circ g)(t) = 0$$

mit Kettenregel:

$$D(f \circ g)(t) = Df(g(t)) \cdot Dg(t)$$

$$= (2\cos t, 2\sin t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$= -2\sin t \cos t + 2 \sin t \cos t = \underline{\underline{0}}.$$

7) Implizite Funktionen

Motivation: gegeben Funktion $F(x,y)$
gesucht: Funktion $g(x)$, so dass

$$F(x, g(x)) = 0.$$

Beispiel: $F(x,y) = x^2 + y^2 - a^2$ (Kreis für $F(x,y) = 0$)

Frage: kann ich $y = g(x)$ als Funktion von x darstellen?

Eine Anwendung der Kettenregel:

geg: $F: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, differenzierbar
$g: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, differenzierbar
Der Graph von g sei in U enthalten und es gelte

$$F(x, g(x)) = 0 \qquad (1)$$

Verkettung von F und der Funktion $G(x) = (x, g(x))^T$,
d.h. $F(x, g(x)) = F \circ G(x) = 0$

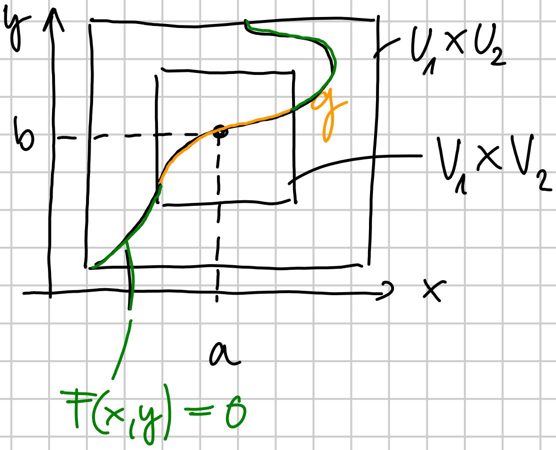
Ableitung von G:
$$DG(x) = (1, g'(x))^T$$

Kettenregel:
$$\begin{aligned} D(F \circ G)(x) &= DF(G(x)) \cdot DG(x) \\ &= DF(x, g(x)) \cdot (1, g'(x))^T \\ &= (F_x(x, g(x)), F_y(x, g(x))) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} \\ &= F_x(x, g(x)) + F_y(x, g(x))\, g'(x) \end{aligned}$$

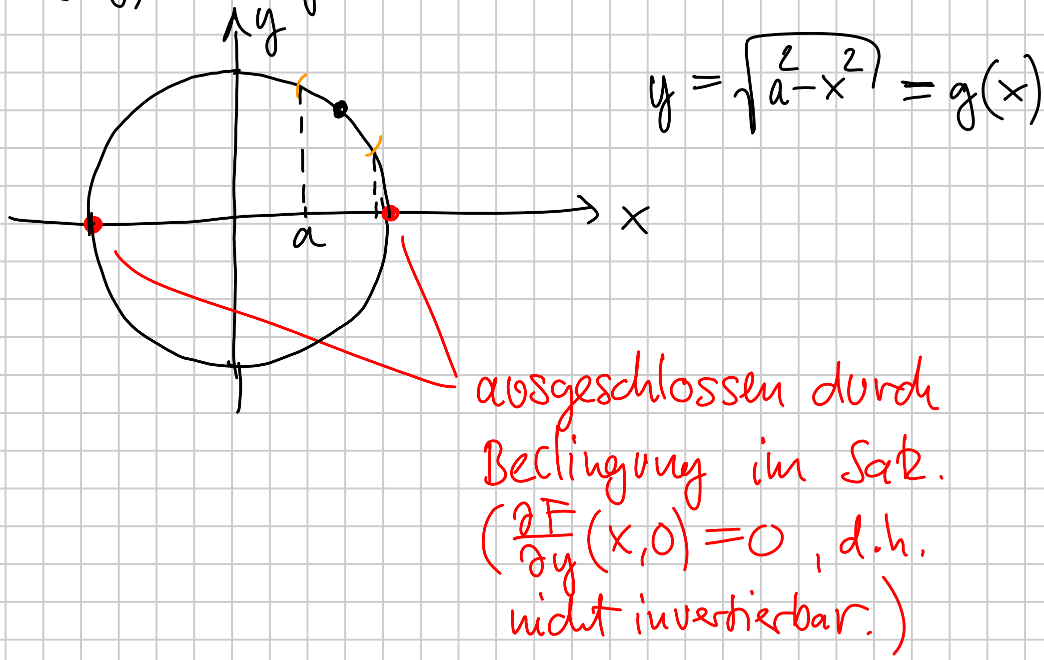
Wegen (1) gilt $D(F \circ G)(x) = 0$, also
$$F_x(x, g(x)) + F_y(x, g(x))\, g'(x) = 0$$

und falls $F_y(x, g(x)) \neq 0$, gilt
$$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}.$$

Satz 7.1: (Satz über implizite Funktionen)
Sei $F: U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$. Sei $(a,b) \in U_1 \times U_2$ mit $F(a,b) = 0$ und die Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ sei invertierbar. Dann gibt es eine Funktion
$$g: V_1 \to V_2, \quad V_1 \subset U_1 \text{ offen}, V_2 \subset U_2 \text{ offen}, a \in V_1, b \in V_2$$
mit $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in V_1$ und $g(a) = b$.
Ist $(x,y) \in V_1 \times V_2$ ein Punkt mit $F(x,y) = 0$, so folgt $y = g(x)$.



Beispiel Kreis: $F(x,y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$



Satz 7.2 (Satz über die Umkehrabbildung).

Sei $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, eine stetig differenzierbare Abbildung, $a \in U$, $f(a) = b$ und die Jacobi-Matrix $Df(a)$ sei invertierbar. Dann ist f bijektiv auf einer Umgebung V von a, d.h. es existiert die Umkehrabbildung

$$g = f^{-1} : V' \to V \quad , \quad V' = f(V),$$

sie ist stetig differenzierbar und

$$\boxed{Dg(b) = Df(a)^{-1}.}$$

Beispiel 7.3: $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad (\mathbb{R}_+ = \{x > 0\})$

$$f(r, \varphi) = (\underbrace{r\cos\varphi}_{x}, \underbrace{r\sin\varphi}_{y}) \quad (\text{„Polarkoordinaten"})$$

Jacobi-Matrix: $$Df(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$\det(Df(r,\varphi)) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r > 0$, damit ist die Funktion f in jedem Punkt (r,φ) lokal invertierbar

Umkehrfunktion (lokal): $g(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right)$.