Analysis III für LB

Notiztitel 19.12.05

[→ 5. Extremwerte]

b) mit Nebenbedingungen

Problemstellung: finde Extremum der Funktion

$$f(x) = \max \quad (\text{oder } \min)\ !$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$$

Dabei sind $f: D \to \mathbb{R}$ und $g_1, \dots, g_m : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.

Sei $S = \{x \in D : g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$. Man nennt $a \in S$ eine lokale Extremalstelle von f bezüglich S, (oder unter den Nebenbedingungen $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$), wenn es eine Umgebung

$$U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \delta\}$$

gibt, so dass gilt:

(i) $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in U_\delta(a)$ (Maximum)

oder

(ii) $f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in U_\delta(a)$ (Minimum).

Satz 5.1: Ist $a \in D$ eine Extremalstelle von f bzgl. S mit den Eigenschaften

(a) $f, g_1, \dots, g_m$ sind in einer Umgebung $U_\delta(a)$ von a stetig partiell differenzierbar,

(b) $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_m(a)$ sind linear unabhängig,

dann gibt es reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ derart, dass

$$\boxed{\nabla f(a) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla g_k(a).}$$

Beispiel 5.2: Gesucht ist der kürzeste Abstand der Fläche

$$\Phi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^4 + 16z = 0\}$$

von der Ebene

$$\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y + 4z - 12 = 0\}.$$

[Es gilt $\Phi \cap \mathcal{E} = \emptyset$, denn $4z = 12 - 2x - y$ in Φ impliziert

$$4(x-1)^2 + \underbrace{y^4 - 4y + 44}_{>0} > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.]$$

Für $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{E}$ und $(x_2, y_2, z_2) \in \Phi$ ist das Quadrat ihres Abstands gegeben durch

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

d.h. wir suchen das Minimum dieser Funktion unter den Nebenbedingungen

$$(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{E}, \text{ d.h. } 2x_1 + y_1 + 4z_1 - 12 =: g_1(x_1, \dots, z_2) = 0$$

$$(x_2, y_2, z_2) \in \phi, \text{ d.h. } 4x_2^2 + y_2^4 + 16z_2 = g_2(x_1, \dots, z_2) = 0.$$

Die Gradienten $\nabla g_1(\dots) = (2,1,4,0,0,0)$ und $\nabla g_2(\dots) = (0,0,0,8x_2, 4y_2^3, 16)$ sind linear unabhängig, nach Satz 5.1 erfüllen die kritischen Stellen daher

$$\begin{aligned}
2(x_1 - x_2) &= 2\lambda_1 && (3)\\
2(y_1 - y_2) &= \lambda_1 && (4)\\
2(z_1 - z_2) &= 4\lambda_1 && (5)\\
-2(x_1 - x_2) &= \lambda_2 8x_2 && (6)\\
-2(y_1 - y_2) &= \lambda_2 4y_2^3 && (7)\\
-2(y_1 - y_2) &= \lambda_2 \cdot 16 && (8)
\end{aligned}$$

Aus (3) und (5) folgt $\frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2}$ (9), sowie

aus (4) und (5) $\frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2} = \frac{1}{4}$ (10), sowie

aus (6) und (8) $\frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2} x_2$, mit (9) also

$x_2 = 1$. Aus (7) und (8) folgt ferner

$$\frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2} = \frac{1}{4} y_2^3, \text{ mit (10) also}$$

$y_2 = 1$. Und mit $g_2(\dots) = 0$ daraus $z_2 = -\frac{5}{16}$.

Setzt man diese drei Werte in (9) und (10) ein, so erhält man

$$x_1 - 1 = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{5}{16}\right)$$
$$y_1 - 1 = \frac{1}{4}\left(z_1 + \frac{5}{16}\right)$$

also

$$32x_1 - 16z_1 = 37 \qquad (11)$$
$$x_1 - 2y_1 = -1 \qquad (12)$$

Und (12) mit $g_1(\ldots) = 0$ ergibt $5x_1 + 8z_1 = 23$, mit (11) also $x_1 = 83/42$. Damit folgt $y_1 = 125/84$ und schließlich $z_1 = \frac{551}{336}$. Der Abstand der beiden Fäden beträgt daher $\frac{41}{84}\sqrt{21} \approx 2{,}24$.