Notiztitel 22.12.2005

Analysis III für LB, Übungsblatt 5

5.1 Sei x die Länge, y die Breite und z die Höhe der Schachtel. Für das Volumen erhalten wir $V = xyz = 1$. d.h. $z = \frac{1}{xy}$. Für die Oberfläche gilt

$$O = xy + 2xz + 2yz = xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x} = O(x,y) \to \min!$$

$$\nabla O(x,y) = \left(y - \frac{2}{x^2},\ x - \frac{2}{y^2}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{x^2},\ x = \frac{2}{y^2} \quad \Leftrightarrow \quad (x_0, y_0) = (2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$$

Betrachten wir die Hesse-Matrix:

$$H_O(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{4}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4}{y^3} \end{bmatrix}, \quad H_O(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$H_O(x_0,y_0)$ ist positiv definit $\Rightarrow (x_0,y_0)$ ist Minimum.

5.2 $\nabla f(x,y,z) = \left(2x,\ (1-z^2)2y,\ -2zy^2\right) \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow x = 0,\ y = 0,\ z$ beliebig

Hesse-Matrix

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-z^2) & (-2z)2y \\ 0 & -4zy & -2y^2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(0,0,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-z^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wir interessieren uns für lokale Minima, d.h. für solche

z, für die $H_f(0,0,z)$ positiv definit ist.

$$v^T H_f(0,0,z)\, v = v^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-z^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v^T \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2(1-z^2)v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2v_1^2 + 2(1-z^2)v_2^2 \geq 0$$

$\Leftrightarrow$ $z \in [-1,1]$. D.h. die Menge der lokalen Minima von f ist

$$M = \{(0,0,z) \mid z \in [-1,1]\}.$$

5.3 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 - y \geq 1$ auf M. Also hat f keine Extrema im Inneren von M (sondern höchstens auf dem Rand).

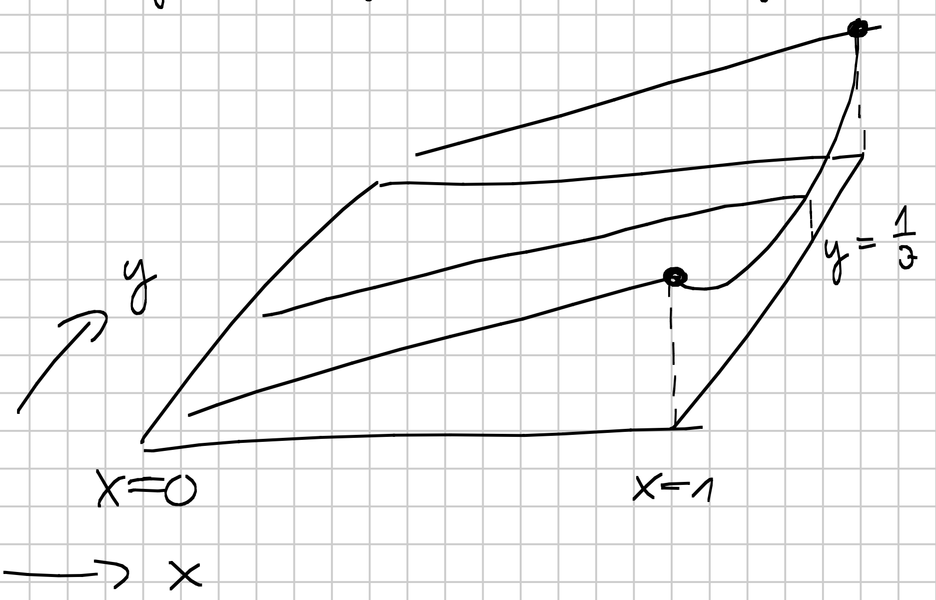
$\underline{x=0}$: $f(0,y) = \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{2}y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1}{3}$$

d.h. lokales Minimum bei $(0,\frac{-1}{3})$.

$\underline{x=1}$: $f(1,y) = 2 - y + \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{2}y + 2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,y) = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}$$



lokale Maxima bei $(1,-1)$ und $(1,1)$.

5.4. $\nabla f(x,y) = e^{x^2+y^2}\big(2x+10y+2x\,g(x,y),\ 2y+10x+2y\,g(x,y)\big)$

mit $g(x,y) = x^2+10xy+y^2$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{matrix} 2x+10y+2x\,g(x,y) = 0 \ \wedge \\ 2y+10x+2y\,g(x,y) = 0 \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} /\cdot y \\ /\cdot x \end{matrix}\right] -$$

$$\Rightarrow \quad 10y^2 - 10x^2 = 0$$

$$\iff \quad y^2 = x^2, \text{ d.h. } y = \pm x$$

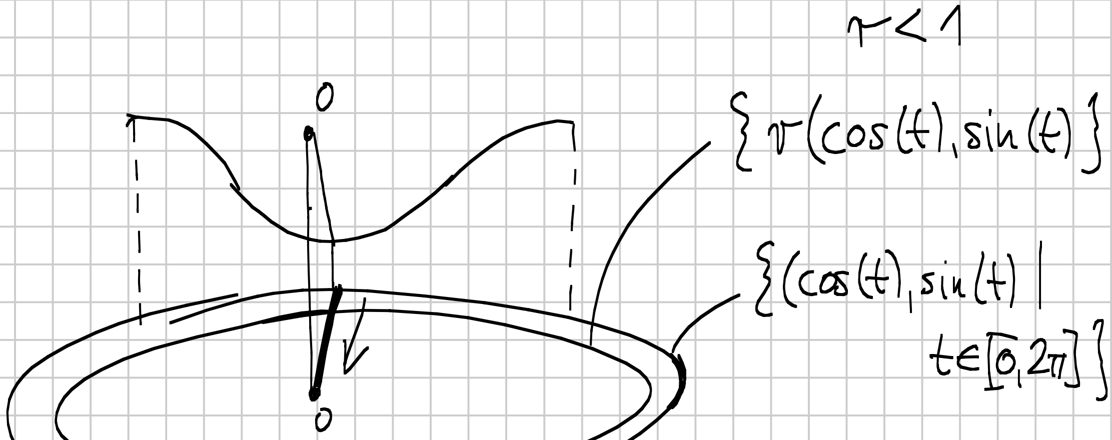
$$\Rightarrow \quad x = y = 0.$$

und $f(0,0)=0$

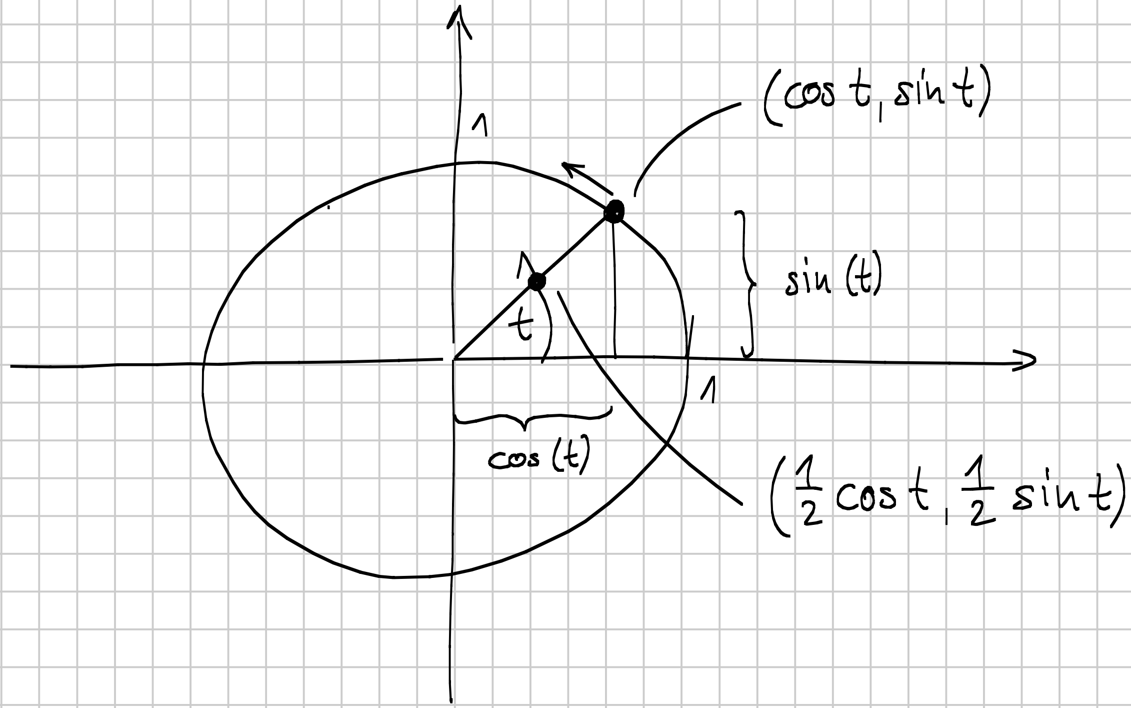
Einziges Extremum von f im Inneren von D ist also $(0,0)$.
Parametrisierung des Randes mit $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$:

$$\tilde{f}(t) = f(\cos(t), \sin(t)) = \big(1 + 10\cos(t)\sin(t)\big)e$$
$$= \big(1+5\sin(2t)\big)e$$

Also hat f auf dem Rand das Minimum $-4e$ und das Maximum $6e$, dies sind (da $f(0,0)=0$) auch die globalen Extrema.



$$f(r\cos(t), r\sin(t)) = (r^2 + 10r^2\cos(t)\sin t)\,e^{r^2}$$
$$= (1+10\cos(t)\sin t)\,r^2 e^{r^2}$$
$$= (1+5\sin(2t))\,r^2 e^{r^2}$$



5.5 $\nabla f(x,y) = \left(4x - 4y - 4x^3,\ 4y - 4x - 4y^3\right) \overset{!}{=} 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x - y - x^3 = 0 \quad \wedge \\ y - x - y^3 = 0 \end{array}\right] + \qquad (1)$$

$$\Longrightarrow \quad x^3 + y^3 = 0 \quad \text{d.h.} \quad x = -y$$

$$\Longrightarrow \quad \text{in } (1): \quad +2x - x^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0,\ y = 0$$

oder $2 - x^2 = 0$, d.h. $x = \pm\sqrt{2}$, $y = \mp\sqrt{2}$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4 - 12x^2 & -4 \\ -4 & 4 - 12y^2 \end{bmatrix}, \quad H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

indefinit, d.h. kein Extremum

$$H_f(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -20 \end{bmatrix}$$

, neg. definit $\Longrightarrow$ zwei Maxima $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$

(ii) $t_{(1,1)}(h) = -2 + \langle \nabla f(1,1), h \rangle = -2 + \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= -2 - 4h_1 - 4h_2$$

$$\left[\, t_a(h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle \,\right]$$

Tangentialebene:

$$T = \{(1+h_1, 1+h_2, -2-4h_1-4h_2) \mid h_1, h_2 \in \mathbb{R}\}$$

5.6 $$\phi'(x) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x, x^3)\cdot 1}_{>0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x, x^3)}_{>0} \cdot \underbrace{3x^2}_{>0} > 0$$

d.h. ϕ' wird nirgends 0, also kann ϕ kein lokales Extremum besitzen.