Biorthogonale Wavelets II

Matthias Wieczorek

24. Januar 2013

1 Diskrete Transformation für biorthogonale Wavelets

Wir nehmen an, es sei ein Signal $c_0(k)$ gegeben. Nach Annahme, sei $c_0(k)$ eine Folge von Skalierungs-Koeffizienten einer Funktion $f(x) \in V_0$. So dass:

$$c_0(k) = \langle f, \varphi_{0,k} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Satz 1.1. *Seien $\varphi(x)$ und $\widetilde{\varphi}(x)$ Skalierungsfunktionen für duale GMRAs. Weiter, seien $h(k)$ und $\widetilde{h}(k)$ die entsprechenden Skalierungsfilter. Wir definieren die Filter $g(k)$ und $\widetilde{g}(k)$ durch*

$$g(k) = (-1)^k \overline{\widetilde{h}(1-k)} \quad \textit{and} \quad \widetilde{g}(k) = (-1)^k \overline{h(1-k)}$$

und die Wavelets $\psi(x)$ und $\widetilde{\psi}(x)$ durch

$$\psi(x) = \sum_n g(n) 2^{1/2} \varphi(2x - n) \quad \textit{and} \quad \widetilde{\psi}(x) = \sum_n \widetilde{g}(n) 2^{1/2} \widetilde{\varphi}(2x - n)$$

Gegeben eine Funktion $f(x), f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, definiere

$$c_0(k) = \langle f, \varphi_{0,k} \rangle$$

und für alle $j \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_j(k) = \langle f, \varphi_{-j,k} \rangle \quad \textit{and} \quad d_j(k) = \langle f, \psi_{-j,k} \rangle$$

Dann gilt:

$$c_{j+1}(k) = \sum_n c_j(n) \overline{h(n-2k)}, \qquad d_{j+1}(k) = \sum_n c_j(n) \overline{g(n-2k)}$$

und

$$c_j(k) = \sum_n c_{j+1}(n) \widetilde{h}(k-2n) + \sum_n d_{j+1}(n) \widetilde{g}(k-2n)$$

Aus diesen Rekursionsformeln definieren wir und jetzt **Approximations-** und **Detailoperatoren** wie folgt:

Definition 1.2. *Gegeben in Paar von Filtern* $h(k)$ *und* $\widetilde{h}(k)$*, definiere* $g(k)$ *und* $\widetilde{g}(k)$*. Definiere die entsprechenden* ***Approximationsoperatoren*** H *und* $\widetilde{H}$ *und die* ***Detailoperatoren*** G *und* $\widetilde{G}$ *zu Signalen* $c(n)$ *durch:*

$$(Hc)(k) = \sum_n c(n)\overline{h(n-2k)}, \qquad (Gc)(k) = \sum_n c(n)\overline{g(n-2k)}$$
$$(\widetilde{H}c)(k) = \sum_n c(n)\overline{\widetilde{h}(n-2k)}, \qquad (\widetilde{G}c)(k) = \sum_n c(n)\overline{\widetilde{g}(n-2k)}$$

Weiter definieren wir die entsprechend ***adjungierten Operatoren*** $H^*, \widetilde{H}^*, G^*$ *und* $\widetilde{G}^*$ *durch:*

$$(H^*c)(k) = \sum_n c(n)h(n-2k), \qquad (G^*c)(k) = \sum_n c(n)g(n-2k)$$
$$(\widetilde{H}^*c)(k) = \sum_n c(n)\widetilde{h}(n-2k), \qquad (\widetilde{G}^*c)(k) = \sum_n c(n)\widetilde{g}(n-2k)$$

Satz 1.3. *Damit ergibt sich für Satz 1.1:*

$$c_{j+1} = Hc_j, \qquad d_{j+1} = Gc_j$$

und

$$c_j = \widetilde{H}^*c_{j+1} + \widetilde{G}^*d_{j+1}$$

2 QMF Bedingungen

Im Folgenden nehmen wir an, es seien $\varphi(x)$ und $\widetilde{\varphi}(x)$ Skalierungsfunktionen dualer GMRA's, mit Skalierungsfiltern $h(n)$ und $\widetilde{h}(n)$ und weiter seien $g(n)$ und $\widetilde{g}(n)$ die entsprechenden Waveletfilter.

Satz 2.1. *Mit* $h(n)$*,* $\widetilde{h}(n)$*,* $g(n)$ *und* $\widetilde{g}(n)$*, definiere:*

$$m_0(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h(n)e^{-2\pi i n\gamma} \quad , \quad \widetilde{m}_0(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n \widetilde{h}(n)e^{-2\pi i n\gamma}$$
$$m_1(\gamma) = e^{-2\pi i(\gamma+1/2)}\overline{\widetilde{m}_0(\gamma+1/2)} \quad , \quad \widetilde{m}_1(\gamma) = e^{-2\pi i(\gamma+1/2)}\overline{m_0(\gamma+1/2)}$$

Weiter definiere die Operatoren $H, \widetilde{H}, G, \widetilde{G}, H^*, \widetilde{H}^*, G^*, \widetilde{G}^*$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $m_0(\gamma)\overline{\widetilde{m}_0(\gamma)} + m_0(\gamma+1/2)\overline{\widetilde{m}_0(\gamma+1/2)} \equiv 1$
2. $\sum_n h(n)\overline{\widetilde{h}(n-2k)} = \delta(k)$
3. $\widetilde{H}^*H + \widetilde{G}^*G = I$
4. $H\widetilde{H}^* = G\widetilde{G}^* = I$

Definition 2.2. *Gegeben die Filter* $h(k)$ *und* $\widetilde{h}(k)$*, definiere:*

$$m_0(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h(n)e^{-2\pi i n\gamma} \qquad \widetilde{m}_0(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n \widetilde{h}(n)e^{-2\pi i n\gamma}$$

Dann bilden $h, \widetilde{h}$ *ein* ***QMF-Paar*** *vorausgesetzt, dass*

1. $m_0(0) = \widetilde{m}_0(0) = 1$ *und*
2. $m_0(\gamma/2)\overline{\widetilde{m}_0(\gamma/2)} + m_0(\gamma/2 + 1/2)\overline{\widetilde{m}_0(\gamma/2 + 1/2)} \equiv 1 \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}$

Wir bezeichnen 1. und 2. als (biorthogonale) QMF Bedingungen.

Satz 2.3. *Seien $h(k), \widetilde{h}(k)$ ein QMF-Paar, dann gilt:*

1. $\sum_n h(n) = \sum_n \widetilde{h}(n) = \sqrt{2}$
2. $\sum_n g(n) = \sum_n \widetilde{g}(n) = 0$
3. $\sum_n h(n)\overline{\widetilde{h}(n-2k)} = \sum_n g(n)\overline{\widetilde{g}(n-2k)} = \delta(k)$
4. $\sum_n g(n)\overline{\widetilde{h}(n-2k)} = \sum_n \widetilde{g}(n)\overline{h(n-2k)} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
5. $\sum_k \overline{h(m-2k)}\widetilde{h}(n-2k) + \sum_k \overline{g(m-2k)}\widetilde{g}(n-2k) = \delta(m-n)$