Caroline Lasser, Ilja Klebanov 04. Junii 2012

Bitte bis Dienstag, 11.06.2013, 12:00 Uhr, abgeben. Diejenigen, die am Montag und Dienstag nicht nach Garching kommen, können auch bis Mittwoch, 10:00 Uhr, abgeben.

Aufgabe 1 (Diagonalisierung)

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A.

(c) Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 2 (Eigenwerte)

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = A^{-1}$ und $B^T = B^2$. Welche Werte können die Eigenwerte von A bzw. B annehmen?

Aufgabe 3 (Multiplikationssatz)

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ und B invertierbar. Für einen alternativen Beweis des Resultats $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ betrachten Sie die Abbildung

$$d : K^{n\times n} \to K \quad , \quad A \mapsto \frac{\det(AB)}{\det(B)}.$$

Zeigen Sie, dass d multilinear, alternierend und normiert ist und folgern Sie daraus den Multiplikationssatz für Determinanten.

Aufgabe 4 (komplexe Eigenwerte reeller Matrizen)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit reellen Einträgen.

(a) Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A ist.

(b) Beweisen Sie, dass im Fall $n = 3$ mindestens ein reeller Eigenwert von A existiert.