Caroline Lasser, Ilja Klebanov 28. Mai 2012

Bitte bis Dienstag, 04.06.2013, 12:00 Uhr, abgeben. Diejenigen, die am Montag und Dienstag nicht nach Garching kommen, können auch bis Mittwoch, 10:00 Uhr, abgeben.

Aufgabe 1 (Lineares Gleichungssystem)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 82 & 45 & 9 \\ 27 & 16 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowohl über die Cramersche Regel als auch über Gaußsche Elimination.

Aufgabe 2 (Elementarmatrizen)
Wir bezeichen wie in Fischer, 2.7, mit $S_i(\lambda), Q_i^j(\lambda)$ und P_i^j die $n \times n$ Elementarmatrizen.

(a) Bestimmen Sie $\det(S_i(\lambda)), \det(Q_i^j(\lambda)), \det(P_i^j)$ und begründen Sie Ihre Antowrt.

(b) Stellen Sie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ als Produkt von Elementarmatrizen dar.

(c) Berechnen Sie $\det(A)$ sowohl über Aufgabenteil (b) als auch über den Laplaceschen Entwicklungssatz.

Aufgabe 3 (Vandermonde-Determinanten)
Seien $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Die Vandermonde-Matrix ist gegeben durch

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

(a) Beweisen Sie mit Induktion über n:

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

(b) Wann ist eine Vandermonde-Matrix invertierbar?

(c) Verwenden Sie eine Vandermonde-Matrix, um das Problem der Polynominterpolation zu formulieren.

Aufgabe 4 (Komplementäre Matrix)
Sei $A \in K^{n \times n}$.

(a) Zeigen Sie: $(A^\sharp)^T = (A^T)^\sharp$.

(b) Berechnen Sie die Determinante von $A^\sharp$.