Caroline Lasser, Ilja Klebanov 21. Mai 2012

Bitte bis Dienstag, 28.05.2013, 12:00 Uhr, abgeben. Diejenigen, die am Montag und Dienstag nicht nach Garching kommen, können auch bis Mittwoch, 10:00 Uhr, abgeben.

Aufgabe 1 (Inverse einer 2x2-Matrix)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$.
Berechnen Sie das Produkt AB und entwickeln Sie daraus eine Vorschrift für die Bestimmung der Inversen einer 2×2-Matrix.

Aufgabe 2 (Ausgleichsgerade)

Gegeben seien die Punkte $P_j = (x_j, y_j)$ mit $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$ und $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 1, y_4 = 2$. Finden Sie die Ausgleichsgerade für diese Punkte, also diejenige Funktion $f(x) = ax + b$, die $\sum_{j=1}^4 |f(x_j) - y_j|^2$ minimiert. Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 3 (Determinanten von Dreiecksmatrizen)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonale $a_{11}, \ldots, a_{nn}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von A über elementare Zeilenumformungen.

(b) Berechnen Sie die Determinante von A über den Laplaceschen Entwicklungssatz.

Aufgabe 4 (Orientierung)

Seien $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Charakterisieren Sie, für welche v, w die Determinante von A positiv ist, für welche negativ und für welche $\det(A) = 0$ gilt. Berechnen und skizzieren Sie dazu mehrere Beispiele.