Caroline Lasser, Ilja Klebanov 7. Mai 2012

Bitte bis Dienstag, 14.05.2013, 12:00 Uhr, abgeben. Diejenigen, die am Montag und Dienstag nicht nach Garching kommen, können auch bis Mittwoch, 10:00 Uhr, abgeben.

Aufgabe 1 (3-Norm)

Wird die 3-Norm $\|\cdot\|_3$ auf $V = C([0,1], R)$ von einem Skalarprodukt induziert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (Trigonometrische Polynome)

Wir betrachten den unitären Vektorraum $(V_N, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit

$$V_N = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} \mid f(x) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikx},\ a_k \in \mathbb{C}\ \forall k \right\} \quad , \quad \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Bemerkung: Das Integral über eine stetige komplexwertige Funktion $h = h_1 + ih_2,\ h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist als $\int_a^b h(x)dx = \int_a^b h_1(x) + ih_2(x)dx := \int_a^b h_1(x)dx + i\int_a^b h_2(x)dx$ definiert und es gilt die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{e^{ikx} \mid k \in \mathbb{Z},\ |k| \le N\}$ eine Orthonormalbasis von V_N bildet.

(b) Gegeben sei eine Funktion $f \in V_N$, deren Koeffizienten a_k nicht bekannt sind, z.B. $f(x) = \cos(x)$. Wie kann man mit Hilfe des Skalarproduktes die Koeffizienten bestimmen? Finden Sie die Koeffizienten für das Beispiel $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = \sin(x)$.

(c) In welchen Orthogonalitätsbeziehungen stehen die Funktionen

$$x \mapsto \cos(kx) \text{ und } x \mapsto \sin(lx) \quad (k, l \in \mathbb{Z},\ |k|, |l| \le N)$$

zueinander?

Aufgabe 3 (Orthogonale Gruppe)

Für festes $\varphi \in \mathbb{R}$ seien die Matrizen

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},\ B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass A_φ, B_φ orthogonal sind und beschreiben Sie die Abbildungen $x \mapsto A_\varphi x,\ x \mapsto B_\varphi x$ geometrisch.

Aufgabe 4 (Normerhaltung impliziert Winkelerhaltung)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ euklidische oder unitäre Vektorräume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, die normerhaltend ist (d.h. $\|F(x)\|_W = \|x\|_V\ \forall x \in V$).
Zeigen Sie, dass sogar gilt: $\langle F(x), F(y)\rangle_W = \langle x, y\rangle_V$.
Tip: Wenden Sie F auf $x + y$ und $x + iy$ an.