Caroline Lasser, Ilja Klebanov 23. April 2012

Bitte bis Dienstag, 30.04.2013, 12:00 Uhr, abgeben. Diejenigen, die am Montag und Dienstag nicht nach Garching kommen, können auch bis Mittwoch, 10:00 Uhr, abgeben.

Aufgabe 1 (Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$)

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt.
Es seien $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\|x\|, \|y\|, \langle x, y \rangle$ und den Winkel, den die beiden Vektoren einschließen. Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 2 (Skalarprodukt induziert Norm)

(a) Definieren Sie die Begriffe Skalarprodukt und Norm (den letzteren entnehmen Sie bitte externen Quellen) auf $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

(b) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine wohldefinierte Norm auf V ist. Sie dürfen hierfür die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwenden:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \qquad \forall x, y \in V.$$

Aufgabe 3 (Skalarprodukte auf Polynomräumen)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{P}_3 \times \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}$ (wie üblich ist $\mathbb{P}_3 := \{p \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(p) \leq 3\}$) Skalarprodukte auf dem Vektorraum $\mathbb{P}_3$ definieren:

(a) $(p, q) \mapsto p(0)q(0)$.

(b) $(p, q) \mapsto \int_0^1 p(t)q(t)dt$.

(c) $(p, q) \mapsto \int_0^1 p'(t)q'(t)dt$.

(d) $(p, q) \mapsto \int_0^1 p(t)q(t)dt + \int_0^1 p'(t)q'(t)dt$.

Aufgabe 4 (Orthogonales Komplement)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ und U ein Untervektorraum von V.

(a) Zeigen Sie, dass $U^\perp := \{w \in V \mid \langle w, u \rangle = 0 \ \ \forall u \in U\}$, das sogenannte orthogonale Komplement von U in V, ebenfalls ein Unterraum von V ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des orthogonalen Komplements von $U = \operatorname{span}\{(1, 2, 3)^T\}$ in $\mathbb{R}^3$ (wie immer mit Beweis).