Caroline Lasser, Ilja Klebanov 16. April 2012

Diese Übung dient der Wiederholung der Kernbegriffe des letzten Semesters.
Bitte bis Dienstag, 23.04.2013, 12:00 Uhr, abgeben. Diejenigen, die am Montag und Dienstag nicht nach Garching kommen, können auch bis Mittwoch, 10:00 Uhr, abgeben.

Aufgabe 1 (Definitionen und Beispiele)
Definieren Sie folgende Begriffe und geben Sie jeweils ein interessantes Beispiel und Gegenbeispiel (ohne Beweis):

(a) Vektorraum und Unterraum

(b) Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis, Dimension

(c) Lineare Abbildung

Aufgabe 2 (Lineare Gleichungssysteme)
Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto Ax$ die zugehörige lineare Abbildung.

(a) Finden Sie alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$, die durch F **skaliert** werden, d.h. dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $Av = \lambda v$ existiert.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_B^B(F)$ für $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

Aufgabe 3 (Polynominterpolation)
Seien $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 5$.

(a) Argumentieren Sie, warum $\mathbb{P}_3 = \{p \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(p) \leq 3\}$ ein Vektorrraum ist und warum dies nicht gilt, wenn man "≤ 3" durch "$= 3$" ersetzt.

(b) Begründen Sie, warum die Polynominterpolation

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_3,\ z \mapsto \text{“das eindeutige Polynom } p \text{ mit } p(x_i) = z_i\text{”}$$

eine lineare Abbildung ist.

(c) Seien $z_0 = 1, z_1 = 2, z_2 = \frac{1}{2}, z_3 = 3$. Fertigen Sie eine saubere Skizze der Lagrange-Funktion ℓ_2 und der Polynominterpolation für diese Werte an.