Zusatzaufgaben zum anschaulichen Argumentieren

1. *Unterräume*
   Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$.
   a) Geben Sie zwei ein-dimensionale Unterräume U und W von V an und skizzieren Sie diese in ein geeignetes Koordinatensystem.
   b) Markieren Sie $U \cap W$ und $\operatorname{span}(U \cup W)$ in ihrem Koordinatensystem und geben Sie die Dimensionsformel für Unterräume an.

2. *Quotientenräume*
   Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$.
   a) Geben Sie alle Unterräume von V an und skizzieren Sie drei exemplarische Beispiele in einem eigenem Koordinatensystem.
   b) Geben Sie zu jedem Unterraum U den zugehörigen Quotientenraum $V \backslash U$ an und ergänzen Sie in jedem Koordinatensystem drei charakteristische Äquivalenzklassen $[v]$ für geeignete $v \in V$.

3. *Basen*
   a) Zeigen Sie, dass die Vektoren
   $$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^2$ bilden und skizzieren Sie v_1 und v_2.
   b) Gegeben ist weiter der Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie v als Linearkombination von v_1 und v_2 und visualisieren Sie diese. Geben Sie den Koordinatenvektor $\Phi_{\mathcal{B}}(v)$ an.
   c) Bilden auch die Vektoren v_1 und v eine Basis des $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antwort auch anschaulich.

4. *Lineares Gleichungssystem*
   a) Geben Sie eine lineares Funktional $f \in (\mathbb{R}^2)^*$ an, dessen Kern ein ein-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^2$ ist und skizzieren Sie $\operatorname{Kern}(f)$ in einem geeigneten Koordinatensystem.
   b) Berechnen Sie für ein $b \neq 0$ eine spezielle Lösung x^* des Gleichungssystems $f(x) = b$ und veranschaulichen Sie x^* sowie $L_f(b)$ in Ihrer Skizze.