Zusatzaufgaben zu komplexen Zahlen

1. *Kalkül: Basen I*
   Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Vektoren
   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$$
   eine Basis des
   a) $\mathbb{R}$-Vektorraums
   b) $\mathbb{C}$-Vektorraums
   $$\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} ; z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$
   bilden.

2. *Kalkül: Basen II*
   Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C} = \{x + iy ; x, y \in \mathbb{R}\}$ sowie
   $$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 1 - i.$$
   Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = (z_1, z_2)$ eine Basis von $\mathbb{C}$ bildet und geben Sie die Koordinatenvektoren $\Phi_{\mathcal{A}}(w_k)$, $k = 1, 2$, für $w_1 = 2$ und $w_2 = 2 + i$ an

3. *Eigenständiges Beweisen: Unterräume*
   Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathbb{R}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ ist.

4. *Kalkül: Kern und Bild*
   Betrachten Sie die Abbildung
   $$f : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2, \; \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 + iz_2 \\ z_2 - iz_1 \end{pmatrix}$$
   über dem $\mathbb{R}$-Vektorraum C.

a) Zeigen Sie, dass f linear ist und geben Sie die f zugeordnete Matrix A_f an.

b) Bestimmen Sie Kern(f) und Bild(f) und überprüfen Sie an diesem Beispiel die Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

c) Ist f

   i. injektiv,

   ii. surjektiv,

   iii. bijektiv?

   Begründen Sie ihre Antwort.

5. *Kalkül: Lineare Gleichungssysteme*
   Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}^2, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} iz_1 + (\frac{1}{2} - i)z_2 + iz_3 \\ 2z_1 - (1-i)z_2 + z_3 \end{pmatrix}$$

   und den Vektor $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L_f(0)$ des homogenen Gleichungssystems.

   b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L_f(b)$ des inhomogenen Gleichungssystems mit rechter Seite b.

6. *Kalkül: Matrizen*

   a) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 2+i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2-i \\ i & -1 & i \end{pmatrix}$.

   b) Bestimmen Sie mit dem Invertierungsalgorithmus die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2-2i & 3i & 1 \\ -2 & -1-4i & -3-3i \\ 3i & -1-i & -2+2i \end{pmatrix}$$

   und protokollieren Sie die benötigten Elementarmatrizen.

   c) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2+i & 1 & i & -1+i \\ 1-i & 0 & -2+2i & -4i \\ -4+4i & 2i & 2 & -6+2i \\ 1+2i & 1+i & -1+3i & -4-2i \end{pmatrix}.$$