MATRIXTRANSFORMATION AUF NORMALFORM

CAROLINE LASSER

Sei $B \in K^{m\times n}$ mit $\operatorname{rang}(B) = r$ und $f_B : K^n \to K^m$, $x \mapsto Bx$ die Multiplikation mit B. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von K^n und eine Basis $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ von K^m, so dass die f_B bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ darstellende Matrix Normalform hat,

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m\times n}.$$

Dies bedeutet

$$f_B = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f_A \circ \Phi_{\mathcal{A}}$$

und

$$Bx = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(A\Phi_{\mathcal{A}}(x)), \qquad x \in K^n.$$

Wir definieren

$$T = \big(\Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(e_1) \mid \quad \cdots \quad \mid \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(e_n)\big) \in \mathrm{GL}(n, K)$$

und

$$S = \big(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1) \mid \quad \cdots \quad \mid \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_m)\big) \in \mathrm{GL}(m, K).$$

Dann gilt

$$Te_j = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(e_j), \qquad j = 1, \ldots, n$$

und

$$Tx = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(x), \qquad T^{-1}x = \Phi_{\mathcal{A}}(x), \qquad x \in K^n.$$

Ebenso erhalten wir

$$Sy = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(y), \qquad y \in K^m.$$

Also gilt

$$B = SAT^{-1}.$$

Date: 2. Februar 2017.