MULTIPLIKATION MIT PERMUTATIONSMATRIZEN

CAROLINE LASSER

1. Rechtsmultiplikation

Ist $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix mit Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n \in K^m$ und P_π, $\pi \in S_n$, eine Permutationsmatrix, so gilt

$$\begin{aligned} AP_\pi &= A\big(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}\big) \\ &= \big(Ae_{\pi(1)}, \dots, Ae_{\pi(n)}\big) \\ &= \big(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)}\big)\,. \end{aligned}$$

Also permutiert Rechtsmultiplikation mit P_π die Spalten der Matrix A gemäß π.

2. Linksmultiplikation

Ist $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix mit Zeilenvektoren $a_1, \dots, a_m \in K^n$ und P_π, $\pi \in S_m$, eine Permutationsmatrix, so gilt

$$P_\pi^t = \big(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(m)}\big)^t = \big(e_{\pi^{-1}(1)}, \dots, e_{\pi^{-1}(m)}\big) = P_{\pi^{-1}}$$

und somit

$$P_\pi A = (A^t P_\pi^t)^t = (A^t P_{\pi^{-1}})^t = \big(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(m)}\big)^t = \begin{pmatrix} a^t_{\pi^{-1}(1)} \\ \vdots \\ a_{\pi^{-1}(m)} \end{pmatrix}.$$

Also permutiert Linksmultiplikation mit P_π die Zeilen der Matrix A gemäß π^{-1}.

3. Inverse einer Permutationsmatrix

Die Inverse einer Permutationsmatrix P_π, $\pi \in S_n$, ist die zu π^{-1} gehörige Permutationsmatrix $P_{\pi^{-1}}$, die gleich der Transponierten von P_π ist,

$$P_\pi^{-1} = P_{\pi^{-1}} = P_\pi^t.$$

Date: 8. Februar 2017.