NORMALFORM EINER DARSTELLENDEN MATRIX

CAROLINE LASSER

Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir konstruieren im Folgenden eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V und eine Basis $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ von W, so dass die f bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ darstellende Matrix von der Form

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

ist, wobei $r = \dim(\mathrm{Bild}(f))$.

(1) Wir wählen $v_1, \ldots, v_r \in V$, so dass $w_1 = f(v_1), \ldots, w_r = f(v_r)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ bilden. Dann sind $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig.

Beweis. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$, so dass $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0$. Dann gilt wegen Linearität von f

$$0 = f(0) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_r f(v_r) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r.$$

Da $w_1, \ldots, w_r$ als Basisvektoren linear unabhängig sind, folgt

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

Also sind $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig. □

(2) Ist $r < n$, so wählen wir eine Basis $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ von $\mathrm{Kern}(f)$. Dann ist $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathcal{A}$ linear unabhängig ist. Nach dem Satz von der Halbierung der Arbeit sind dann diese n Vektoren aus V eine Basis des n-dimensionalen Vektorraums V. Seien also $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ mit

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

Dann gilt wegen Linearität von f und $v_{r+1}, \ldots, v_n \in \mathrm{Kern}(f)$

$$0 = f(0) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r,$$

und wegen lineare Unabhängigkeit der Vektoren $w_1, \ldots, w_r$

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

Dann folgt aber aus $\alpha_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ wegen linearer Unabhängigkeit der Vektoren $v_{r+1}, \ldots, v_n$ schließlich auch

$$\alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Also ist $\mathcal{A}$ linear unabhängig und eine Basis. □

Date: 26. Januar 2017.

(3) Ist $r < m$, so ergänzen wir die Vektoren $w_1, \dots, w_r$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ von W. Dann gilt

$$\begin{aligned} A &= (\Phi_{\mathcal{B}}(f(v_1)), \dots, \Phi_{\mathcal{B}}(f(v_n))) \\ &= (\Phi_{\mathcal{B}}(w_1), \dots, \Phi_{\mathcal{B}}(w_r), \Phi_{\mathcal{B}}(0), \dots, \Phi_{\mathcal{B}}(0)) \\ &= (e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0) \\ &= \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wie gewünscht.