LINEARE ALGEBRA I (LEHRAMT GYMNASIUM)
WINTERSEMESTER 2016/17

CAROLINE LASSER

Inhaltsverzeichnis

Date: Version vom 8. Februar 2017.

1. Vektorräume

Grundwissen: Definitionen.

(1) Vektorraum
(2) Unterraum
(3) Erzeugendensystem
(4) Lineare Unabhängigkeit
(5) Basis
(6) Dimension
(7) Koordinatenvektor
(8) Summen von Vektorräumen
(9) Quotientenraum

Grundwissen: Sätze.

(1) Unterraumkriterium
(2) Austauschlemma
(3) Austauschsatz
(4) Basisergänzungssatz
(5) Dimensionsformel Unterräume
(6) Dimensionsformel Quotientenraum

Kalkül.

(1) Nachweis linearer Unabhängigkeit
(2) Nachweis, dass eine Menge erzeugend ist

Schulwissen vom höheren Standpunkt.

(1) Geraden in der Ebene (8. Klasse)
(2) Geraden und Ebenen im Raum (12. Klasse)
(3) Dreidimensionale kartesische Koordinaten (11. Klasse)

Anschauliches Argumentieren.

(1) Anschauliche Deutung linearer Unabhängigkeit im Raum (12. Klasse)
(2) Schnitte von Unterräumen des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$
(3) Quotientenräume der Ebene

Beispiele.

(1) $\mathbb{R}^n$ insbesondere für $n = 2$ und $n = 3$
(2) Geraden und Ebenen durch den Ursprung
(3) Vektorraum der Polynome
(4) $\mathbb{C}^n$

Beweise.

(1) Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^n$ sind Unterräume
(2) Eindeutigkeit von Linearkombinationen bei linearer Unabhängigkeit
(3) Austauschlemma
(4) Längensatz

1.1. **Vektorräume und Unterräume (18.10.)**

Schulbezug: Ursprungsgeraden in der Ebene und im Raum

Neue Begriffe: Vektorrraum und Unterraum

Beweise: Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^n$ sind Unterräume

Im Detail.

(1) Definition Vektorraum
(2) Beispiel K^n
(3) Beispiel $K[X]$
(4) Definition Unterraum
(5) Unterraumkriterium
(6) Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^n$

Literatur. [DL, Kapitel 3.1 & 3.2]

1.2. **Lineare Unabhängigkeit (25.10.)**
Schulbezug: Anschauliche Deutung linearer Unabhängigkeit im Raum (12. Klasse)

Neue Begriffe: Linearkombination, Spann, Erzeugendensystem, linear unabhängig

Beweise: Eindeutigkeit von Linearkombinationen bei linearer Unabhängigkeit

Im Detail.

(1) Definition Linearkombination
(2) Linearkombinationen im $\mathbb{R}^2$
(3) Definition Spann und Erzeugendensystem
(4) Beispiel Ursprungsgeraden
(5) Standardvektoren im K^n
(6) Standardvektoren im $K[X]$
(7) Definition lineare Unabhängigkeit von Tupeln
(8) Lineare Unabhängigkeit der Standardvektoren im $\mathbb{R}^3$
(9) Definition lineare Unabhängigkeit von Mengen und Familien
(10) Lineare Unabhängigkeit der Standardvektoren im $K[X]$
(11) Eindeutigkeitssatz
(12) Beispiel für fehlende Eindeutigkeit im $\mathbb{R}^3$

Literatur. [DL, Kapitel 3.4 & 3.5]

1.3. **Basis und Dimension (8.11.)**

Schulbezug: 3-dimensionale kartesische Koordinaten (11. Klasse)

Neue Begriffe: Basis, Koordinatenabbildung und -vektor, Dimension

Beweise: Austauschlemma und Längensatz

Im Detail.

(1) Standardvektoren im $\mathbb{R}^3$
(2) Definition Basis
(3) Definition Koordinatenabbildung und -vektor
(4) Beispiel im $\mathbb{R}^3$
(5) Austauschlemma mit Beweis
(6) Austauschsatz
(7) Längensatz mit Beweis
(8) Definition Dimension

Literatur. [DL, Kapitel 3.6 & 3.7 & 3.8]

1.4. **Summen und Quotientenräume (15.11.)**

Schulbezug: Geraden in der Ebene (8. Klasse), Geraden und Ebenen im Raum (12. Klasse)

Neue Begriffe: Summe von Unterräumen, direkte Summe, Quotientenraum

Beweise: Charakterisierungen direkter Summen

Im Detail.

(1) Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^2$
(2) Definition Summe von Unterräumen
(3) Die Summe ist der Spann der Vereinigung.
(4) Definition direkte Summe
(5) $U_1 + U_2$ direkt $\iff U_1 \cap U_2 = \{0\}$
(6) $U_1 + U_2$ direkt $\iff \dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2)$
(7) Definition Quotientenraum
(8) Quotientenraum ist K-Vektorraum
(9) Geraden im $\mathbb{R}^2$ als Vektoren im Quotientenraum

Literatur. [DL, Kapitel 3.10 & 3.11]

2. Lineare Abbildungen

Grundwissen: Definitionen.

(1) Lineare Abbildung
(2) affiner Unterraum
(3) Dualraum

Grundwissen: Sätze.

(1) Eindeutige Festlegung linearer Abbildung
(2) Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme
(3) Isomorphie von Vektorräumen
(4) Dimensionsformel für lineare Abbildungen
(5) Schubfachprinzip in endlich-dimensionalen Vektorräumen

Kalkül.

(1) Naive Gauß-Elimination

Schulmathematik vom höheren Standpunkt.

(1) Lineare Gleichungen in einer Variablen (7. Klasse)
(2) Lineare Funktionen einer Variablen (8. Klasse)
(3) Lineare Gleichungen in zwei Variablen (8. Klasse)
(4) Lineare Gleichungen in drei Variablen (9. Klasse)
(5) Dreidimensionale kartesische Koordinaten (11. Klasse)

Anschauliches Argumentieren.

(1) Anschauliches Lösen linearer Gleichungen in ≤ 3 Variablen

Beispiele.

(1) Projektionen
(2) Stauchungen unf Streckungen
(3) Rotationen im $\mathbb{R}^2$
(4) Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$
(5) Differentiation
(6) Integration

Beweise.

(1) Konstruktionssatz
(2) Lösungsmengen als affine Unterräume
(3) Dimensionsformel
(4) Schubfachprinzip

2.1. **Lineare Abbildungen (22.11.)**
Schulbezug: lineare Funktionen in einer Variablen (8. Klasse)

Neue Begriffe: lineare Abbildung

Beweise: Isomorphie- und Konstruktionssatz

Im Detail.

(1) Lineare Funktionen als Polynome
(2) Graph einer linearen Funktion als Element eines Quotientenraums
(3) Definition lineare Abbildung
(4) Beispiel Drehung im $\mathbb{R}^2$
(5) Beispiel Differentiation
(6) Kern und Bild als Unterräume
(7) Isomorphiesatz
(8) Konstruktionssatz

Literatur. [DL, Kapitel 4.5 & 4.6]

2.2. **Lineare Gleichungssysteme (29.11.)**
Schulbezug: lineare Gleichungen in ein bis drei Variablen (7.–9. Klasse)

Neue Begriffe: affiner Unterraum

Beweise: Darstellungssatz, Lösungsmenge als affiner Unterraum

Im Detail.

(1) Darstellung der $\pi/4$ Drehung
(2) Darstellungssatz
(3) Definition affiner Unterraum
(4) Charakterisierung affiner Unterräume
(5) Dimension affiner Unterräume
(6) Satz über die Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme
(7) Drei Beispiele linearer Gleichungssysteme

Literatur. [DL, Kapitel 4.7 & 4.8]

2.3. **Dimensionsformel (06.12.)**
Schulbezug: 3-dimensionale kartesische Koordinaten (11. Klasse)

Neue Begriffe: –

Beweise: Isomorphiesatz für Vektorräume, Dimensionsformel, Schubfachprinzip

Im Detail.

(1) $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum
(2) Isomorphiesatz
(3) Isomorphie erhält Basen
(4) Dimensionsformel
(5) Schubfachprinzip, endlich-dimensionale Vektorräume

Literatur. [DL, Kapitel 4.9 & 4.10]

2.4. **Lineare Abbildungen als Vektoren (13.12.)**
Schulbezug: Geraden in der Ebene (8. Klasse), Ebenen im Raum (12. Klasse)

Neue Begriffe: Dualraum, duale Basis

Beweise: –

Im Detail.

(1) $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 4
(2) $\mathrm{Hom}(V, W)$ als K-Vektorraum
(3) Basen für $\mathrm{Hom}(V, W)$
(4) Definition Dualraum
(5) Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^2$ (als Spann, Kern und Graph)
(6) Definition duale Basis
(7) Duale Basis und Koordinatenabbildung

Literatur. [DL, Kapitel 4.11 & 4.12]

3. Matrizen

Grundwissen: Definitionen.

(1) Darstellende Matrix
(2) Äquivalente Matrizen
(3) Ähnliche Matrizen
(4) General linear group
(5) Elementarmatrizen
(6) Permutationsmatrizen
(7) Transformationsmatrix
(8) Transponierte Matrix
(9) Rang einer Matrix
(10) Zeilenstufenform

Grundwissen: Sätze.

(1) Darstellung in Normalform
(2) Basen und general linear group
(3) Transformationsformel
(4) Zeilenrang gleich Spaltenrang
(5) LR-Zerlegung

Kalkül.

(1) Koordinatenberechnung
(2) Rechnen mit Permutationen
(3) Lösen linearer Gleichungssysteme
(4) Invertierung

Schulmathematik vom höheren Standpunkt.

(1) Gauß-Elimination

Anschauliches Argumentieren.

(1) Kommutative Diagramme

Beispiele.

(1) Diagonalmatrizen
(2) Dreiecksmatrizen
(3) $O(2)$

3.1. **Matrizen und lineare Abbildungen (20.12.)**

Neue Begriffe: duale Abbildung, $m \times n$-Matrizen, Matrix-Vektor-Produkt

Beweise: Dimension duales Bild und Kern, Isomorphie von Homomorphismen- und Matrizenräumen

Im Detail.

(1) Definition duale Abbildung
(2) Dimension von Bild und Kern der dualen Abbildung
(3) Definition $m \times n$ Matrix
(4) Matrix-Vektor-Produkt
(5) Visualisierung des Matrix-Vektor-Produkts im $\mathbb{R}^2$
(6) Matrix-Vektor-Produkt als Linearkombination der Spalten
(7) Matrix-Vektor-Produkt mit den Standardbasisvektoren
(8) $\mathrm{Hom}(K^n, K^m) \cong K^{m \times n}$

Literatur. [DL, Kapitel 5.2 & 5.3]

3.2. **Invertierbare Matrizen (10.01.)**
Schulbezug: Lineare Gleichungssysteme in 1–3 Variablen (7.–9. Klasse)

Neue Begriffe: Matrizenprodukt, Invertierbarkeit

Beweise: Isomorphie von Homomorphismen- und Matrizenräume, Charakterisierungen der Invertierbarkeit

Im Detail.

(1) $\mathrm{Hom}(K^n, K^m) \cong K^{m\times n}$
(2) Lineare Gleichungen in Matrixform
(3) Matrizenprodukt
(4) Invertierbarkeit
(5) Inverse von 2×2 Matrizen
(6) Charakterisierung der Invertierbarkeit
(7) Invertierungsalgorithmus (2×2 Beispiel)

Literatur. [DL, Kapitel 5.5 & 5.6]

3.3. **Transformationsformel (17.01.)**

Schulbezug: Dreidimensionale kartesische Koordinaten (11. Klasse)

Neue Begriffe: allgemeine lineare Gruppe, Elementarmatrizen, darstellende Matrix, Transformationsmatrix

Beweise: Transformationsformel (per Diagramm)

Im Detail.

(1) Definition Elementarmatrix
(2) Produkte von Elementarmatrizen
(3) Definition allgemeine lineare Gruppe
(4) Elementarmatrizen als Erzeuger der allgemeinen linearen Gruppe
(5) Definition darstellende Matrix
(6) Definition Transformationsmatrix
(7) Merkregeln für darstellende und Transformationsmatrizen
(8) Diagramme für darstellende und Transformationsmatrizen
(9) Darstellende und Transformationsmatrizen für den K^n
(10) Transformationsformel

Literatur. [DL, Kapitel 5.4 & 5.8]

3.4. **Transposition und Rang (24.01.)**
Schulbezug: –

Neue Begriffe: transponierte und symmetrische Matrix, inneres und äußeres Produkt von Vektoren, Rang einer Matrix

Beweise: Dualitätssatz, Zeilenrang gleich Spaltenrang

Im Detail.

(1) Definition transponierte und symmetrische Matrix
(2) Rechenregeln für die Transposition
(3) Innere und äußere Vektorprodukte
(4) Dualitätssatz
(5) Erinnerung an Dualraum, duale Basis, duale Abbildung
(6) Diagramme zur darstellenden Matrix
(7) Beweis Dualitätssatz
(8) Definition Rang
(9) Rangabschätzung
(10) Zeilenrang gleich Spaltenrang

Literatur. [DL, Kapitel 5.9 & 5.10]

3.5. **Zeilenstufenform (31.01.)**

Schulbezug: Lineare Gleichungssysteme in 1–3 Variablen (7.–9. Klasse)

Neue Begriffe: Zeilenstufenform, Pivot, Permutationsmatrix

Beweise: –

Im Detail.

(1) Definition Zeilenstufenform und reduzierte Zeilenstufenform
(2) Definition Pivot und diagonale Pivots
(3) drei 4×6 Beispiele
(4) Zeilenstufenform und Rang
(5) Lösbarkeitskriterium
(6) Gleichungssystem in reduzierter Zeielnstufenform mit diagonalen Pivots
(7) Rüchwärts-Substitution
(8) Definition Permutationsmatrix

Literatur. [DL, Kapitel 5.7 & 5.11]

3.6. **Eliminationsverfahren (07.02.)**

Schulbezug: Lineare Gleichungssysteme in 1–3 Variablen (7.–9. Klasse)

Neue Begriffe: –

Beweise: dritter Beweis für Zeilenrang gleich Spaltenrang

Im Detail.

(1) Lineare Gleichungssysteme in Zeilenstufenform
(2) Konstruktion einer Zeilenstufenform (ohne Beweis)
(3) Gaußsche Elimimation
(4) Beispiel einer 3×4 Elimination
(5) Gauß–Jordan Elimination
(6) Erweiterte Koeffizientenmatrix
(7) Zeilenrang gleich Spaltenrang (Beweis über Elementarmatrizen)
(8) Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix in Zeilenstufenform

Literatur. [DL, Kapitel 5.12]

Literatur

[DL] O. Deiser, C. Lasser: Erste Hilfe in Linearer Algebra, Springer–Verlag, 2015.